Bernhard Band

ÜBERLEGUNGEN ZUR LÖSUNG BETRIEBSWIRTSCHAFTLICHER ENTSCHEIDUNGSPROBLEME MIT DISKRETEN VARIABLEN DURCH ANWENDUNG VON SUCHVERFAHREN

1970

1971

ÜBERLEGUNGEN ZUR LÖSUNG BETRIEBSWIRTSCHAFTLICHER ENTSCHEIDUNGSPROBLEME MIT DISKRETEN VARIABLEN DURCH ANWENDUNG VON SUCHVERFAHREN

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
durch den
Fachbereich Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster

Vorgelegt von
Bernhard Band
aus Deutsch Krone
1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Erster Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Koch
Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. Dietrich Adam
Dekan: Prof. Dr. Josef Bleymüller
Tag der mündlichen Prüfung: 17. Dezember 1970

Gliederung

Seite

A Einleitung: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre und Unternehmensforschung 1

I Der Ausgangspunkt der Arbeit 1

II Die Problemstellung 3

III Der Aufbau der Arbeit 11

B Untersuchung der Beiträge der Unternehmensforschung zur betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre 12

I Vorbemerkung 12

II Anwendung von mathematischen Optimierungsverfahren im Rahmen der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre 14

1 Das Problem des Genauigkeitsgrades der Wirtschaftlichkeitsrechnung 14

a Die Grenzen der numerisch-exakten Optimumbestimmung 14

(1) Der Zweck der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre 14

(2) Die Begrenztheit des Anwendungsbereiches der Methoden der numerisch-exakten Optimumbestimmung 15

(3) Die Begrenztheit der Möglichkeiten der Informationsbeschaffung 17

b Möglichkeiten zur Überbrückung der Kluft zwischen Theorie und Praxis 20

c Die Methode der intuitiven Optimumbestimmung auf der Basis numerischer Suboptimierungen 21

(1) Das Problem der Wirtschaftlichkeitsrechnung über die Wirtschaftlichkeitsrechnung 21

(2) Zur Frage der Isomorphie zwischen Entscheidungssituation und Entscheidungsmodell 24

(3) Zur Frage der adäquaten Entscheidungsmethode 28

Seite

(4) Objektive und subjektive Rationalität 32

2 Die bekannten Optimierungsverfahren und ihre Anwendungsvoraussetzungen 35

a Ein Gliederungsversuch 35

b Problemorientierte Spezialverfahren 40

c Problemunabhängige Simultanverfahren 42

(1) Differentialrechnung 42

(2) Lineare Programmierung 46

(3) Nichtlineare Programmierung 52

(4) Zusammenfassung der Anwendungsvoraussetzungen 59

d Sukzessive Optimierungsverfahren 61

(1) Allgemeine Kennzeichnung der sukzessiven Optimierungsverfahren 61

(2) Das Prinzip der dynamischen Programmierung 63

(3) Das Prinzip der Branch-and-Bound-Methoden 68

(a) Verwendung von Bounds als Auswahlkriterien 68

(b) Verwendung von Bounds als Verwerfkriterien 74

(4) Sequentielle Enumeration 78

(5) Der Anwendungsbereich der sukzessiven Optimierungsverfahren 80

C Der einschränkende Charakter der Anwendungsvoraussetzungen der mathematischen Optimierungsmethoden 81

I Struktureigenschaften empirischer Entscheidungsprobleme 81

1 Nichterfüllung der Anwendungsvoraussetzungen der mathematischen Optimierungsverfahren 81

a Eigenschaften der Zielfunktion in empirischen Problemen 81

Seite

b Eigenschaften des Lösungsraumes in empirischen Problemen 85

2 Illustration durch Beispiele 88

II Beispiele unternehmerischer Planungsprobleme und die Schwierigkeiten ihrer Lösung 90

1 Das Problem der optimalen Produktionsweise bei verschiedenen Anpassungsmöglichkeiten 90

a Die Fragestellung der traditionellen Produktions- und Kostentheorie als Ausgangspunkt 90

b Die Problemstellung 93

c Lösungsansätze in der Literatur 98

(1) Der Lösungsweg von Jacob 98

(2) Die Lösung mittels linearer Programmierung 101

(3) Die Lösung mittels dynamischer Programmierung 104

d Die Notwendigkeit allgemeinerer Lösungsverfahren 105

2 Die Planung des Produktionsprogramms 106

a Die Problemstellung 106

b Das "allgemeine" Produktionsmodell bei Gutenberg 111

c Die Notwendigkeit allgemeiner Lösungsverfahren 112

3 Produktionsplanung bei im Zeitablauf wechselnden Marktverhältnissen 113

a Die Problemstellung 113

b Konstruktion eines mathematisch-formalen Modells 122

(1) Die Variablen 122

(2) Die Komponenten der Zielfunktion 126

(a) Erlöse 126

(b) Aggregat - Betriebskosten 126

(c) Beschäftigungsfixe Aggregatkosten 127

(d) Aggregat-Stillstandskosten 128

(e) Aggregat-Inbetriebnahmekosten 129

Seite

(f) Aggregat-Stillegungskosten 130

(g) Aggregat-Anschaffungskosten 130

(h) Gehaltskosten 131

(i) Zeitlöhne 131

(j) Akkordlöhne 133

(k) Einstellungs- und Entlassungskosten 134

(l) Lagerungskosten 136

(m) Ein- und Auslagerungskosten 138

(n) Die Zielfunktion insgesamt 140

(3) Die Nebenbedingungen 140

(a) Nicht explizit zu erfassende Nebenbedingungen 140

(b) Zeitliche Kapazitätsbedingungen 141

(c) Mengenmäßige Kapazitätsbedingungen 142

(d) Begrenzung des Spielraums für Intensitätsvariationen 142

(e) Ganzzahligkeitsbedingungen für Zeit-Variationen 143

(f) Ganzzahligkeitsbedingungen für Absatzpreise 143

(g) Mengenkontinuitätsbedingungen 143

(h) Weitere Nebenbedingungen 144

c Die Notwendigkeit allgemeinerer Lösungsverfahren 145

D Iterative Suchverfahren als allgemeiner Ansatz zur Behandlung unternehmerischer Entscheidungsprobleme 149

I Das Prinzip der Methoden zulässiger Richtungen als allgemeiner Ansatz 149

II Darstellung der Grundgedanken der Methoden zulässiger Richtungen 151

III Die Übertragung der Grundgedanken der Methoden zulässiger Richtungen auf die Behandlung beliebig nichtlinearer ganzzahliger Probleme 156

			Seite
	1	Vorbemerkung	156
	2	Die Methode des steilsten Anstiegs als allgemeines heuristisches Optimierungsverfahren	157
	3	Die Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs	162
	4	Die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs	166
		a Die Schwächen der Methoden des steilsten Anstiegs und des zyklischen Koordinatenanstiegs	166
		b Darstellung der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs	167
		c Bemerkungen zum Rechenaufwand	176
IV	Zusatzregeln für die Anwendung von Methoden zulässiger Richtungen auf nichtlineare ganzzahlige Programmierungsprobleme		177
	1	Die Art der Zusatzregeln	177
	2	Der Schrittweitenalgorithmus	178
	3	Ein "globaler" Algorithmus	182
		a Die gemeinsamen Mängel der beschriebenen Methoden	182
		b Pfrangers Idee des "globalen Algorithmus"	183
		c Ein "globaler Algorithmus" für die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs	186
V	Illustration und Vergleich der iterativen Suchverfahren		189
	1	Die Schwierigkeiten des Vergleichs	189
	2	Ein grafisches Beispiel	192
	3	Ein numerisches Beispiel	201
E	Zusammenfassung: Die Bedeutung der iterativen Suchverfahren		210
Verzeichnis der Symbole			213
Literaturverzeichnis			217

A Einleitung: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre und Unternehmensforschung

I Der Ausgangspunkt der Arbeit

Seit der Entwicklung der Simplex-Methode der linearen Programmierung durch Dantzig im Jahre 1947[1] hat die Unternehmensforschung die betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre[2] in starkem Maße befruchtet. Denn formal entspricht das allgemeine Programmierungsproblem der Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre. Geht es hier um die Bestimmung einer optimalen Konstellation von Aktionsparametern bei begrenzten Handlungsmöglichkeiten, so handelt es sich dort - abstrakt - um die Bestimmung der Niveaus einer Menge von Variablen, so daß unter bestimmten Nebenbedingungen

---

1 Mit der Entwicklung der Simplex-Methode wurde zugleich der Ausgangspunkt zu der Entwicklung des gesamten Gebietes der mathematischen Programmierung geschaffen. Vgl. G. Hadley, Nichtlineare und dynamische Programmierung (in deutscher Sprache hrsg. von H.P. Künzi), Würzburg-Wien 1969, S. 29; S.I. Gass, Linear Programming. Methods and Applications, New York-Toronto-London 1958, S. IX.

2 Von einigen Autoren wird auch mißverständlich von "Entscheidungstheorie" gesprochen. Siehe z.B. E. Heinen, "Einführung des Herausgebers" zu P. Vischer, Simultane Produktions- und Absatzplanung, Rechnungstechnische und organisatorische Probleme mathematischer Programmierungsmodelle, Band 3 der Schriftenreihe: E. Heinen (Hrsg.), Die Betriebswirtschaft in Forschung und Praxis, Wiesbaden 1967, Abschnitt II (S. 6); E. Kosiol, Die Unternehmung als wirtschaftliches Aktionszentrum. Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, Reinbek bei Hamburg 1966, S. 197; D. Schneider, Investition und Finanzierung, Lehrbuch der Investitions-, Finanzierungs- und Ungewißheitstheorie, Köln -Opladen 1970, S. 63.

Zum Begriff "Entscheidungslehre" sowie zur Problematik der erweiterten Fassung des Begriffs der Unternehmungstheorie siehe H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, Probleme der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre, Wiesbaden 1970, S. 18 sowie S. 29-32.

der Wert einer diese Variablen enthaltenden Zielfunktion maximiert wird.[1]

Im folgenden soll zunächst einerseits die Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre näher gekennzeichnet werden. Andererseits sollen die Beiträge der Unternehmensforschung zur Erfüllung dieser Aufgabe untersucht werden, insbesondere die Anwendung von Methoden der mathematischen Programmierung auf betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme. Aus der Gegenüberstellung dieser Beiträge und jener Aufgabe ergibt sich der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit. Diese Gegenüberstellung bezieht sich auf die Anwendungsvoraussetzungen der bekannten Verfahren der mathematischen Programmierung und auf die Eigenschaften von Modellen, die den empirischen Entscheidungssituationen möglichst weitgehend isomorph sind. Daraus ergibt sich dann der Anstoß zu dem hier zu unternehmenden Versuch, nach Verfahren zu suchen, bei denen die Diskrepanz zwischen der Struktur der empirischen Entscheidungsprobleme und den mathematischen Eigenschaften der zu ihrer Lösung mit Hilfe eines solchen Verfahrens zu konstruierenden Modelle möglichst gering ist.

---

1 Das Programmierungsproblem wird häufig auch umgekehrt als das Problem der Minimierung einer Funktion unter Nebenbedingungen formuliert. Da aber die Probleme "minimiere f(y)" und "maximiere -f(y)" identisch sind, sowie aus Gründen, die weiter unten noch deutlich werden, sei in dieser Arbeit grundsätzlich nur von Maximierungsproblemen gesprochen.

"Mathematical programming is concerned with the problem of maximizing or minimizing a function of variables that are restricted by a number of constraints." G. Zoutendijk, Methods of Feasible Directions, A Study in Linear and Non-Linear Programming, Amsterdam-London-New York-Princeton 1960, S. 1.

II Die Problemstellung

Zur Verdeutlichung der Problemstellung dieser Arbeit sei zunächst die Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre wie folgt skizziert.

Gegenstand einer handlungsanalytisch verstandenen Betriebswirtschaftslehre[1] ist die Unternehmung als Gesamtheit der Tätigkeiten oder Handlungen, die ein privates Subjekt, der Unternehmer[2], zum Zwecke des Einkommenserwerbs vollzieht.[3] Jeder Handlung aber geht, wenn es mehrere Handlungsmöglichkeiten gibt (und das ist der Regelfall), eine Entscheidung, d.h. Auswahl einer von mehreren Handlungsalternativen voraus.[4]

---

1 Zur handlungsanalytischen Konzeption der Theorie der Unternehmung siehe H. Koch, Über eine allgemeine Theorie des Handelns, in: H. Koch (Hrsg.), Zur Theorie der Unternehmung, Festschrift zum 65. Geburtstag von E. Gutenberg, Wiesbaden 1962, S. 367-423; derselbe, Die Theorie der Unternehmung als Globalanalyse, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, Band 120, 1964, S. 385-434.

2 Auf die Problematik der "Hypothese der Ein-Mann-Unternehmung" kann hier nicht eingegangen werden. Dies müßte zu einer Diskussion über interpersonelle Zielkonflikte sowie über die Organisation des Entscheidungsprozesses führen. Es sei daher verwiesen auf D. Adam, Koordinationsprobleme bei dezentralen Entscheidungen, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 39. Jg. 1969, S. 615-632; derselbe, Entscheidungsorientierte Kostenbewertung, Wiesbaden 1970.

3 Vgl. H. Koch, Die Theorie der Unternehmung..., a.a.O., S. 386; derselbe, Betriebliche Planung, Grundlagen und Grundfragen der Unternehmenspolitik, 36. Lieferung, Reihe A, Beitrag Nr. 4 von E. Gutenberg (Hrsg.), Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1961, S. 15.

4 Auch wenn es - im Ausnahmefall - nur eine einzige Handlungsmöglichkeit gibt, kann man sagen, daß der Handlung eine Entscheidung vorausgeht, nämlich die Entscheidung zwischen "handeln" und "nicht handeln".

"Entscheidungen bestimmen Ablauf und Gestalt des Unternehmungshandelns."[1]

Die Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre besteht nun darin, dem Unternehmer bei der Entscheidungsfindung Hilfestellung zu leisten, indem ihm Methoden zur Verifizierung der in der betriebswirtschaftlichen Theorie gewonnenen und zu Entscheidungskriterien umgeformten Aussagen zur Verfügung gestellt werden.[2]

Die zentrale Aussage der Theorie der Unternehmung aber lautet: "Der Unternehmer wählt diejenige Handlungsweise, von der er sich den größten Gewinn verspricht."[3] Die zwingende Gültigkeit dieses Satzes wird z.B. von H. Koch ausführlich herausgearbeitet,[4] er folgt aber auch schon aus der Definition der Unternehmung als "System von zweckmotivierten Handlungen", die zum Einkommenserwerb vorgenommen werden,[5] oder aus Kosiols Definition des Wirtschaftens "als zielgerichtetes menschliches Handeln, das durch den Einsatz knapper Mittel mit dem Sachziel der Bedarfsdeckung gekennzeichnet ist."[6]

---

1 E.E. Scheuing, Der Unternehmer als Entscheidungszentrum, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 37. Jg. 1967, S. 651-658, hier S. 658.

2 Vgl. H. Koch, Die Theorie der Unternehmung als Globalanalyse, a.a.O., S. 433; derselbe, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 16 und S. 89-130; L. Pack, Die Elastizität der Kosten. Grundlagen einer entscheidungsorientierten Kostentheorie, Band 1 von L. Pack (Hrsg.), Schriften zur theoretischen und angewandten Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1966, S. 15.

3 Vgl. H. Koch, Die Theorie der Unternehmung als Globalanalyse, a.a.O., S. 410; derselbe, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 26f., S. 85.

4 Ebenda.

5 H. Koch, Betriebliche Planung, a.a.O., S. 15.

6 E. Kosiol, Betriebswirtschaftslehre und Unternehmensforschung. Eine Untersuchung ihrer Standorte und Beziehungen auf wissenschaftstheoretischer Grundlage, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 34. Jg. 1964, S. 743-762, hier S. 751.

Wenn man von der exakten Fassung des Gewinnbegriffes[1] absieht, ist dieser zentrale Satz der Theorie der Unternehmung nach herrschender Lehre die Grundlage für die Bildung des Optimalitätskriteriums bei numerischen Optimumbestimmungen (Wirtschaftlichkeitsrechnungen). Das gilt auch unter Berücksichtigung derjenigen Autoren, die nicht von der obigen aus Kochs handlungsanalytischer Konzeption der Unternehmungstheorie resultierenden Aussage ausgehen sondern die Aussage, der Unternehmer strebe nach Gewinnmaximierung oder es gelte das erwerbswirtschaftliche Prinzip, axiomatisch als Prämisse ihren betriebswirtschaftlichen Untersuchungen voransetzen.[2]

Die betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre muß daher stets vom Rationalprinzip, angewandt auf das Prinzip der Gewinnerzielung,[3] bzw. dem Gewinnmaximie-

---

1 Siehe hierzu z.B. H. Koch, Der Begriff des ökonomischen Gewinns - Zur Frage des Optimalitätskriteriums in der Wirtschaftlichkeitsrechnung, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 20. Jg. (NF) 1968, S. 389-441; derselbe, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 35-86; K. Hax, Der Gewinnbegriff in der Betriebswirtschaftslehre, Band 10 von E. Schmalenbach (Hrsg.), Ergänzungsbände zur Zeitschrift für Handelswissenschaftliche Forschung, Leipzig 1926.

2 Vgl. z.B. D. Adam, Produktionsplanung bei Sortenfertigung. Ein Beitrag zur Theorie der Mehrproduktunternehmung, Wiesbaden 1969, S. 19; H. Koch, Betriebliche Planung, a.a.O., S. 18; R. Dorfman, Application of Linear Programming to the Theory of the Firm, Berkeley-Los Angeles (Cal.) 1951, S. 5; K. Mellerowicz, Unternehmenspolitik, Band I, Freiburg i.Br. 1963, S. 49 und S. 58; E. Gutenberg, Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, Reihe A, 1. Beitrag von E. Gutenberg (Hrsg.), Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1958, S. 39; derselbe, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Erster Band, Die Produktion, 12. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York 1966, S. 10 und 454. Vgl. hierzu auch W. Busse von Colbe, Entwicklungstendenzen in der Theorie der Unternehmung, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 34. Jg. 1964, S. 615-627, hier S. 616; P. Hammann, Gewinnmaximierung - Dominantes Ziel oder Zieldominante? Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 38. Jg. 1968, S. 227-268, hier insbesondere S. 267; H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 89ff.

3 H. Koch, Betriebliche Planung, a.a.O., S. 22ff.

rungsprinzip[1] ausgehen. Es ist also prinzipiell nach derjenigen Handlungsweise zu fragen, die den m a x i m a l e n Gewinn verspricht. So ist Henn und Kosiol zuzustimmen, wenn sie in bezug auf die unternehmerischen Entscheidungen feststellen: "Ein solcher Entscheidungsprozeß bedeutet die Lösung einer Extremalaufgabe."[2] oder er weise 'die logische Struktur eines Optimalproblems auf."[3] Und man kann mit D. Schneider die Aufgabe der "Entscheidungstheorie" mit dem Satz kennzeichnen: "Es ist die Handlungsmöglichkeit mit dem größten Zielbeitrag zu wählen."[4]

Dem stehen auch die Überlegungen Simons über eine begrenzte Rationalität nicht entgegen.[5] Seine Bedenken richten sich nämlich nicht gegen Bemühungen einer an die herkömmliche deduktive Theorie anschließenden Entscheidungslehre, Methoden zur Optimumbestimmung im Sinne einer Extremierung zu entwickeln. Vielmehr hat er angesichts der begrenzten Fähigkeiten der Individuen zur exakten Optimumbestimmung Zweifel an der Realitätsnähe einer Theorie, die Entscheidungen ausschließlich auf solchen Optimumbestimmungen basiert sieht. "Es

---

1 Vgl. z.B. L. Pack, Rationalprinzip und Gewinnmaximierungsprinzip, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 31. Jg. 1961, S. 207-220 und S. 281-290; E. Gutenberg, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Erster Band, a.a.O., S. 453.

2 R. Henn, Über die Struktur mikroökonomischer Entscheidungssituationen, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 34. Jg. 1964, S. 508-515, hier S. 509.

3 E. Kosiol, Betriebswirtschaftslehre und Unternehmensforschung..., a.a.O., S. 751.

4 D. Schneider, Investition und Finanzierung, a.a.O., S. 63.

5 Vgl. H.A. Simon, Das Verwaltungshandeln. Eine Untersuchung der Entscheidungsvorgänge in Behörden und privaten Unternehmen, Heft 12 von Verwaltung und Wirtschaft, Schriftenreihe der Westf. Verw.- und Wirtschaftsakademien, Stuttgart 1955, insbesondere S. 44-72; derselbe, Models of Man, Social and Rational, New York-London 1957, insbesondere S. 241-273.

stellt sich die Aufgabe, die globale Rationalität des homo oeconomicus durch eine Art rationalen Verhaltens zu ersetzen, die mit dem Zugang zu Informationen und den rechnerischen Fähigkeiten, die der Mensch tatsächlich besitzt, vereinbar ist."[1]

Als Ausgangspunkt der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre wird also hier die deduktive Theorie der Unternehmung mit dem oben zitierten Kernsatz[2] angesehen. Daraus ergibt sich ihre prinzipielle Aufgabe, Methoden zur exakten Optimumbestimmung zu entwickeln. Darüberhinaus aber stellt sich die Aufgabe, die Ergebnisse der Theorie der Unternehmung durch Empfehlung geeigneter Methoden der Unternehmenspraxis nutzbar zu machen. Hierbei allerdings ist zwischen dem erreichbaren Genauigkeitsgrad und dem dazu erforderlichen Rechenaufwand abzuwägen, und hierbei können im Anschluß an Simons induktiv gewonnene Aussagen[3] über

---

1 "...the task is to replace the global rationality of economic man with a kind of rational behavior that is compatible with the access to information and the computational capacities that are actually possessed by .. man." H.A. Simon, Models of Man, a.a.O., S.241.

2 Siehe S. 4 dieser Arbeit.

3 Für Simon's Überlegungen mag der Begriff "Entscheidungstheorie" im Gegensatz zur "Entscheidungslehre" (vgl. dazu die Anmerkung 2 zu Seite 1) treffend sein. Es handelt sich hierbei jedoch im Gegensatz zur deduktiven handlungsanalytischen Theorie der Unternehmung um induktiv gewonnene Aussagen, die als solche nicht den Ausgangspunkt der Entscheidungslehre bilden können, sondern in den praktischen Bereich der Optimumbestimmung gehören. Ihr Sinn kann vereinfachend wie folgt beschrieben werden. "Globale" Rationalität erfordert Optimumbestimmung im Sinne einer Extremierung; die dabei auftretenden praktischen Schwierigkeiten aber bewirken, daß die tatsächlich zu beobachtenden Entscheidungen meist nur begrenzter Rationalität entsprechen, daß das Individuum sein Anspruchsniveau den verfügbaren Möglichkeiten zur Auffindung "befriedigender" Lösungen anpaßt. Vgl. dazu z.B. H.A. Simon, Das Verwaltungshandeln, a.a.O., S. 47, 53, 56 f.; derselbe, Models of Man, a.a.O., S. 241, 243, 252 261 und 262.

eine begrenzte Rationalität der Entscheidungen Überlegungen angestellt werden, die u.U. Abstriche gegenüber der erstgenannten Teilaufgabe zulassen können. Hierauf aber ist im einzelnen weiter unten einzugehen.[1]

Es geht also in dieser Arbeit um das (u.U. durch praktische Gesichtspunkte begrenzte) Streben nach Determinierung derjenigen Konstellation der Varianten von Unternehmungsvariablen, bei der der damit verbundene Gewinn am größten ist, m.a.W. um die optimale Gestaltung der Gewinnbeeinflussungsgrößen.[2]

Als Unternehmungsvariable seien "all jene Unternehmensmerkmale bezeichnet, welche Gegenstand unternehmerischer Entscheidung sind bzw. sein können."[3] Statt von Varianten der Variablen sei im folgenden von "Niveaus", bzw. insgesamt von einer "Niveaukombination" gesprochen. Der Terminus "Niveau" wird hierbei gebraucht, um seine Bedeutung ganz unmißverständlich von dem Begriff "Wert" im Sinne des "Erwünschtheitsgrades" einer Handlungsweise[4] abzugrenzen als die einer Variablen zugeordnete eine ihrer Varianten bezeichnende Zahl. Und zwar wird er gebraucht sowohl für Variable, die viele Niveaus annehmen können, als auch für sogenannte

---

1 Siehe Abschnitt B II 1.

2 Diesen Begriff kann man in Analogie zu Packs Konzept der Kosten"be"einflussungsgrößen prägen, um die Handlungsvariablen terminologisch von dem ebenfalls auf den Gewinn einflußnehmenden Datenrahmen (Gewinneinflußgrößen) (siehe hierzu R.A. Howard, Dynamic Programming, Management Science, Serie A, Band 12, 1966, S. 317-348, hier S. 318f.) abzuheben. Vgl. L. Pack, Die Elastizität der Kosten, Grundlagen einer entscheidungsorientierten Kostentheorie, Band 1 von L. Pack (Hrsg.), Schriften zur theoretischen und angewandten Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1966, S. 18.

3 H. Koch, Die Theorie der Unternehmung..., a.a.O., S. 387f.

4 Siehe derselbe, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 45ff.

qualitative Unternehmungsvariable wie z.B. den Standort, die Produktart und dgl. Denn man kann z.B. die Variable "Unternehmensstandort", die die Varianten A, B, C ... habe, auflösen in die Hilfsvariablen a, b, c ... mit den jeweiligen Varianten "ja" und "nein". Die Variante "ja" kann nun durch die Zahl 1, die Variante "nein" durch die Zahl 0 ausgedrückt werden. Auf diese Weise kann man jede Variable quantifizieren und somit jede mögliche Handlungsweise durch eine Niveaukombination einer gegebenen Menge von Variablen ausdrücken.

Formal geht es also hier um die Lösung des Problems: Maximiere (mit vertretbarem Aufwand) den Wert einer Zielfunktion unter Beachtung gewisser Nebenbedingungen. Unter Zielfunktion sei dabei eine Regel verstanden, nach der alternativen Niveaukombinationen der Unternehmungsvariablen jeweils eindeutige einen Erwünschtheitsgrad bezeichnende Werte oder, mathematisch ausgedrückt, alternativen Punkten y im n-dimensionalen[1] Euklidischen Raum in jeweils eindeutiger Weise Punkte im ein-dimensionalen Euklidischen Raum zugeordnet werden. Unerheblich ist dabei, ob diese Zuordnungsregel in analytischer Form vorliegt oder ob sie in einem Satz von Wertetabellen ihrer Komponenten oder in einer anderen Form definiert ist. In unternehmerischen Entscheidungsproblemen bringt die Zielfunktion grundsätzlich eine Abhängigkeit des Gewinnes bzw. von Gewinnbestand-

---

1 Dabei sei n die Anzahl der Variablen, deren Niveaus festzulegen seien. Ein beliebiger Punkt y ist also durch einen Spaltenvektor mit n Komponenten x_i determiniert, wobei die i-te Komponente das Niveau der i-ten Varaiblen angibt. Der Buchstabe y wird im folgenden zur Bezeichnung beliebiger Punkte, unabhängig von einem Algorithmus, verwendet, während der Buchstabe z zur Bezeichnung der von einem Algorithmus generierten, d.h. im Laufe der Suche nach einem Optimum auftauchenden Punkte benutzt werden wird.

teilen zum Ausdruck, denn der Erwünschtheitsgrad alternativer Unternehmungsweisen wird durch den Gewinn gemessen.[1] Am Rande ist dazu zu bemerken, daß es sich bei betriebswirtschaftlichen Minimierungsproblemen, die ja in der Literatur breiten Raum einnehmen, dem Sinne nach um verkürzte Maximierungsprobleme[2] handelt,[3] und daß darüber hinaus jedes Minimierungsproblem (durch Umkehrung des Vorzeichens der Zielfunktion) formal in ein Maximierungsproblem umgewandelt werden kann.[4]

Die Nebenbedingungen geben an,welche Niveaukombinationen der Variablen eine realisierbare Handlungsalternative bezeichnen. Sie determinieren also den zulässigen Lösungsraum des Entscheidungsproblems.

Inwieweit nun die so skizzierte Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre durch die bisher bekannt gewordenen Verfahren der mathematischen Programmierung erfüllt wird, ist in der vorliegenden Arbeit zu untersuchen. Diese Untersuchung wird ergeben, daß bis heute weder eine Methode existiert, die auf alle unternehmerischen Entscheidungsprobleme anwendbar ist, noch für jedes denkbare Entscheidungsproblem eine geeignete Lösungsmethode existiert. Der Verfasser wird daher eine Vorgehensweise vorschlagen, die zwar provisorisch erscheinen muß, die aber als genereller Ansatz zur Lösung der Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre geeignet erscheint.

---

1 Vgl. H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 14f.

2 Vgl. derselbe, Betriebliche Planung, a.a.O., S. 99.

3 Unterscheiden sich die Alternativen lediglich hinsichtlich der negativen Gewinnkomponenten (Kosten), so kann das Problem der Gewinnmaximierung durch Fortlassen der positiven Komponenten (Erlöse) zu einem Kostenminimierungsproblem verkürzt werden. Die Kostenminimierung bleibt aber dem Sinne nach Gewinnmaximierung.

4 Aus diesen Gründen genügt es, im folgenden ausschließlich von Maximierungsproblemen zu sprechen.

III Der Aufbau der Arbeit

Die soeben genannte Untersuchung der Frage, inwieweit die Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre durch die Anwendung der bisher bekannt gewordenen Methoden der mathematischen Programmierung erfüllt werden kann, sei im Abschnitt B durchgeführt und durch Beispiele unternehmerischer Entscheidungsprobleme im Abschnitt C illustriert. Im Anschluß daran werden im Abschnitt D "iterative Suchverfahren" zur Diskussion gestellt. Dabei geht es um die Anwendung von Grundgedanken der "Methoden zulässiger Richtungen"[1] in einem allgemeinen Ansatz zur Behandlung unternehmerischer Entscheidungsprobleme. Der Abschnitt E schließlich soll einige zusammenfassende Bemerkungen enthalten.

---

1 G. Zoutendijk, Methods of Feasible Directions, a.a. O., S. 64ff.; W.I. Zangwill, Nonlinear Programming. A Unified Approach, Englewood Cliffs (N.J.) 1969, S. 102ff.; H.P. Künzi - W. Krelle (unter Mitwirkung von W. Oettli), Nichtlineare Programmierung, Band I von W. Krelle, H.P. Künzi et al. (Hrsg.), Monographien zur Unternehmensforschung, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S. 181ff.; H.M. Wagner, Principles of Operations Research, Englewood Cliffs (N.J.) 1969, S. 596ff.

B Untersuchung der Beiträge der Unternehmensforschung zur betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre

I Vorbemerkung

Im folgenden soll nun untersucht werden, inwieweit die im Rahmen der Unternehmensforschung entwickelten Optimierungsverfahren geeignet sind, die Aufgaben der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre zu erfüllen. Dabei kann es nicht Aufgabe dieser Arbeit sein, eine umfassende Darstellung der fast unüberschaubaren Vielfalt von mathematischen Optimierungsverfahren zu geben. Ein solches Unterfangen müßte mehrere Bände füllen. Denn alleine die lineare Programmierung hat sich "derart entwickelt, daß selbst der Spezialist nur noch mit Mühe das weite Feld überschauen kann."[1] Das gleiche gilt - eher noch in verstärktem Maße - für das Gebiet der nichtlinearen Optimierung[2] sowie der dynamischen Programmierung[3]. Dem Verfasser sei daher eine vergröbernde, pauschale Behandlung dieser Frage nachgesehen. Er muß sich auf umrißartige Skizzierungen beschränken. Diese sind nicht dazu bestimmt, einschlägige Lehrbücher zu ersetzen; es wird nicht angestrebt, daß der Leser

---

1 H.P. Künzi, Zum heutigen Stand der nichtlinearen Optimierungstheorie, Unternehmensforschung, Band 12, 1968, S. 1-22, hier S. 1.

2 Vgl. z.B. R.L. Ackoff, Vorwort zu R.L. Ackoff (Hrsg.), Progress in Operations Research, Band 1, New York-London 1961, S. VII.

3 Obwohl die dynamische Programmierung ein Prinzip zur Lösung nichtlinearer Programmierungsprobleme darstellt, erscheint es zweckmäßig, nichtlineare Programmierung (als Oberbegriff für eine Gruppe spezieller Verfahren) und dynamische Programmierung (als ein durch verschiedene konkrete Optimierungsverfahren ausfüllbares Prinzip zur Aufspaltung eines Problems) wohl zu unterscheiden, denn erstere gehört in den Bereich der ungeteilten, letztere in den der geteilten Optimierung. Vgl. H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 187.

nach der Lektüre dieses Abschnittes imstande ist, mit den angesprochenen Verfahren zu arbeiten. Vielmehr geht es lediglich darum, die Voraussetzungen und Grenzen der Anwendbarkeit herauszustellen. Dabei läßt es sich auch nicht immer vermeiden, einen Mangel an mathematischer Exaktheit zugunsten besserer Verständlichkeit des hier Wesentlichen inkauf zu nehmen. Zur eingehenderen Behandlung der einzelnen Verfahren sei daher auf die Literatur verwiesen.[1]

---

1 Stellvertretend für viele seien hier die folgenden Veröffentlichungen genannt: G.B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton (N.J.) 1963; S.I. Gass, Linear Programming, Methods and Applications, New York-Toronto-London 1958; M.J. Beckmann, Lineare Planungsrechnung, Linear Programming, Ludwigshafen a. Rh. 1959; H.C. Joksch, Lineares Programmieren, Band 4 von W.G. Hoffmann (Hrsg.), Schriften zur angewandten Wirtschaftsforschung, Tübingen 1962; C.W. Churchman-R.L. Ackoff-E.L. Arnoff, Introduction to Operations Research, New York-London 1957; R. Henn-H.P. Künzi, Einführung ind die Unternehmensforschung I, II, Berlin-Heidelberg-New York 1968; A. Vazsonyi, Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, Wien-München 1962; H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O.; W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O.; H.P. Künzi-W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, a.a.O.; M.J. Beckmann, Dynamic Programming of Economic Decisions, Band IX von W. Krelle-H.P. Künzi et al. (Hrsg.), Ökonometrie und Unternehmensforschung, Berlin-Heidelberg-New York 1968; K. Neumann, Dynamische Optimierung, Theorie und Anwendungen, Mannheim-Wien-Zürich 1969; G. Hadley, Nichtlineare und dynamische Programmierung, in deutscher Sprache hrsg. von H.P. Künzi, Würzburg-Wien 1969; G. L. Nemhauser, Einführung in die Praxis der dynamischen Programmierung, München-Wien 1969; R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton (N.J.) 1957; R. Bellman-St.E. Dreyfus, Applied Dynamic Programming, Princeton (N.J.) 1962; St.E. Dreyfus, Dynamic Programming and the Calculus of Variations, New York (N.Y.) 1965; für weitere Literaturangaben sei verwiesen auf: H.P. Künzi-W. Oettli (unter Mitwirkung von R. Pfranger und S. Tan), Nichtlineare Programmierung, Neuere Verfahren, Bibliographie, Nr. 16 von M. Beckmann - H.P. Künzi (Hrsg.), Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, Berlin-Heidelberg-New York 1969, S. 75-180.

II Anwendung von mathematischen Optimierungsverfahren im Rahmen der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre

1 Das Problem des Genauigkeitsgrades der Wirtschaftlichkeitsrechnung

a Die Grenzen der numerisch-exakten Optimumbestimmung

(1) Der Zweck der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre

Der Zweck der betriebswirtschaftlichen Enscheidungslehre wird hier darin gesehen, durch Herausarbeitung und Empfehlung von Methoden der Verifikation unternehmungstheoretischer Sätze die Theorie der Unternehmung der Wirtschaftspraxis nutzbar zu machen.[1] Der unmittelbaren und vollen Erfüllung dieses Zweckes stehen jedoch zwei Umstände entgegen. Der erste besteht darin, daß eine handlungsanalytisch konzipierte Unternehmungstheorie[2] - auf diese bezieht sich der Verf. ausschließlich - im Interesse der Exaktheit und gedanklichen Absicherung der Analyse mit wirklichkeitsfremden Prämissen operieren muß. Gedacht sei hier insbesondere an die Annahme, das entscheidende Subjekt (der Unternehmer) sei in der Lage, sich eine vollständige und detaillierte Datenvorstellung zu bilden, sowie die Annahme der Möglichkeit einer völlig

---

1 Vgl. z.B. H. Koch, Die Theorie der Unternehmung..., a.a.O., S. 434.

2 Zur handlungsanalytischen Konzeption der ökonomischen Theorie siehe H. Koch, Über eine allgemeine Theorie des Handelns, in: H. Koch (Hrsg.), Zur Theorie der Unternehmung, Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg, Wiesbaden 1962, S. 367-423; derselbe, Die Theorie der Unternehmung..., a.a.O.; derselbe, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., insbesondere S. 25-28, 69-85.

mühelosen Optimumbestimmung, d.h. einer Optimumbestimmung ohne jeden Aufwand.[1] Der zweite Umstand, der der unmittelbaren und vollen Erfüllung des Zweckes der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre entgegensteht, besteht darin, daß in der Empirie die Möglichkeiten der Informationsbeschaffung und der Optimumbestimmung begrenzt sind. Dies sei im folgenden zunächst verdeutlicht.

(2) Die Begrenztheit des Anwendungsbereiches der Methoden der numerisch-exakten Optimumbestimmung

Läßt man die Frage der Informationsbeschaffung zunächst außer acht und behält die Annahme einer vollständigen und detaillierten Datenvorstellung bei, so ist zu prüfen, ob die verfügbaren Methoden der numerisch-exakten Optimumbestimmung[2] die Verifizierung des unternehmungstheoretischen Basistheorems "Der Unternehmer handelt auf der Basis seiner Datenvorstellung so, daß der Gewinn so groß wie möglich wird"[3] in jedem Falle ermöglichen.

Angesichts des Umfanges der Literatur zur Unternehmensforschung und der Vielfalt von Optimierungsverfahren, die heute existieren, könnte man vermuten, daß für jede denkbare Struktur bezüglich der Eigenschaften der Zielfunktion und des zulässigen Lösungsraumes von konkreten Entscheidungsproblemen eine Methode der numerisch-exakten Optimumbestimmung zu finden sein müsse,

---

1 Siehe z.B. H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 73.

2 Dieser Ausdruck wurde übernommen von H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 13. Mit diesem Terminus wird der herkömmliche Begriff der "Wirtschaftlichkeitsrechnung" präzisiert.

3 Vgl. z.B. H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 25.

deren Anwendungsvoraussetzungen dieser Problemstruktur entsprechen. Indessen muß man bei näherem Hinsehen feststellen, daß eine solche Hoffnung trügt. Sämtliche bisher vorgeschlagenen Optimierungsverfahren sind nur unter recht speziellen einschränkenden Voraussetzungen sinnvoll anwendbar, die in vielen praktischen Entscheidungsproblemen nicht erfüllt sind.[1] Diese Aussage sei an dieser Stelle nur als These aufgestellt. Die Erhärtung dieser These möge einem späteren Abschnitt (B II 2) vorbehalten sein.

Eine weitere Grenze, an die die Anwendung von mathematischen Optimierungsverfahren im Rahmen einer numerisch-exakten Optimumbestimmung stoßen kann, ist der Rechenaufwand. Je exakter und detaillierter eine Wirtschaftlichkeitsrechnung durchgeführt wird, desto größer ist - das erscheint selbstverständlich - der Aufwand für die Optimumbestimmung. Die notwendige Formulierung der Entscheidungssituation in einem mathematisch-formalen Modell erfordert den Einsatz von Arbeitskräften, die Bestimmung der optimalen zulässigen Lösung des Modells erfordert den Einsatz von Rechengeräten. Die Optimumbestimmung erfolgt also in der Praxis nicht mühelos, wie in der Theorie der Unternehmung unterstellt werden muß, sondern sie erfordert einen Faktoreinsatz. Der Gewinn, der aus der als Modellösung konzipierten Handlungsweise resultiert, wird

---

1 Im übrigen besteht noch ein informatorisches Problem: Dieses liegt, so will es dem Verf. scheinen, in der Vielfalt der Methoden der Unternehmensforschung und in dem Umfang der einschlägigen Literatur. Selbst wenn es für jedes konkrete Entscheidungsproblem ein geeignetes Optimierungsverfahren gäbe, so wäre oft im Einzelfall ein nicht unerheblicher Aufwand erforderlich, dieses in der nahezu unüberschaubaren Literatur aufzuspüren. Vgl. R.L. Ackoff, Vorwort zu R.L. Ackoff (Hrsg.), Progress in Operations Research, Volume I, New York-London 1961, S. VII.

teilweise (in extremen Fällen möglicherweise sogar vollkommen) durch den Aufwand für die Wirtschaftlichkeitsrechnung aufgezehrt. Selbst das Ergebnis der exaktesten denkbaren Wirtschaftlichkeitsrechnung, soweit sie unter Berücksichtigung der Anwendungsvoraussetzungen der Optimierungsmethoden möglich ist, gibt daher nicht die optimale Unternehmungsweise im ganzen an, denn diese umfaßt auch den für die Wirtschaftlichkeitsrechnung erforderlichen Faktoreinsatz.[1]

(3) Die Begrenztheit der Möglichkeiten der Informationsbeschaffung

Was nun die Informationsbeschaffung betrifft, so ist zwischen Struktur-Informationen (Grob-Informationen) und numerischen (Detail-)Informationen zu unterscheiden.

Mit Struktur-Informationen sind hier jene Informationen gemeint, die die konkreten Bedingungen der Entscheidungssituation in ihrer Struktur erfassen. Dazu gehört die Art der funktionalen Beziehungen, die zwischen Einzelhandlungen und dem Gewinn bestehen. Es ist zu erfassen, ob mit zunehmendem Umfang eines Handlungsmerkmales der Gewinn steigt oder sinkt, ob diese Beziehung linear, progressiv oder degressiv ist, ob von einem gewissen Niveau der betrachteten Handlungsvariablen an eine Umkehr der Beziehungsrichtung eintritt und dgl. Als Beispiel sei der Zusammenhang zwischen Kosten und Beschäftigung genannt, der in einer Kostenfunktion zum Ausdruck gebracht wird. Ferner sind zu erfassen

---

1 Die Unternehmungsweise im ganzen ist definiert als die Gesamtheit aller Handlungen (also auch des Faktoreinsatzes für die Wirtschaftlichkeitsrechnung), die ein privates Subjekt in selbständiger Position (der Unternehmer) zum Zwecke des Einkommenserwerbs vollzieht. Vgl. H. Koch, Die Theorie der Unternehmung..., a.a.O., S. 385.

die restriktiven und integrativen Interdependenzen[1], die zwischen verschiedenen Handlungsmerkmalen bestehen. Man denke beispielhaft an den Umstand, daß bei verbundener Produktion die Variationsbreite der Ausbringungsmenge eines Produktes von den Ausbringungsmengen aller übrigen Erzeugnisse abhängig ist, oder an den Umstand, daß in Ansehung der Präferenzen der Nachfrager nur bestimmte Preis-Mengen-Relationen eines abzusetzenden Erzeugnisses realisierbar sind, bzw. man denke an den Fall der absatzmäßigen Verbundenheit zweier Güter, wo der Erlös, der mit dem Verkauf eines Erzeugnisses erzielt werden kann, davon abhängig ist, wieviel von dem anderen abgesetzt wird, oder schlechthin an all jene Fälle, in denen das betriebswirtschaftliche Zurechnungsproblem unlösbar ist.[2] Solche Struktur-Informationen sind für jede Entscheidung unbedingt erforderlich. Wenn man das Problem nicht kennt, kann man keine sinnvolle Entscheidung treffen.

Zur Gewinnung von Struktur-Informationen über die Entscheidungssituation hat die ökonomische Theorie[3] (Produktions- und Kostentheorie, Haushaltstheorie, Absatztheorie, Zinstheorie und dgl.) wertvolle Beiträge geleistet; im Sinne der Bereitstellung von Struktur-Informationen ist die Theorie unmittelbar in der Praxis anwendbar.

---

1 Zum Begriff der restriktiven und der integrativen Interdependenz siehe H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 193 bzw. S. 26.

2 Vgl. D. Adam, Das Interdependenzproblem in der Investitionsrechnung und die Möglichkeiten einer Zurechnung von Erträgen auf einzelne Investitionsobjekte, Der Betrieb, 19. Jg., 1966, S. 989-993.

3 Man nehme den Ausdruck "Theorie" in diesem Zusammenhang nicht allzu genau, denn bei den angesprochenen Beiträgen handelt es sich nicht ausschließlich um allgemeinbegrifflich gehaltene Aussagen über die Unternehmung, sondern z.T. auch um auf konkrete Situationen bezogene Analysen.

Schwieriger ist die Erlangung von numerischen Informationen für jede konkrete Entscheidungssituation. Es geht hier um die numerische Bestimmung der Parameter derjenigen Funktionen, die das Problem kennzeichnen (Zielfunktion und Nebenbedingungen). Die Beschaffung dieser Informationen ist mit erheblichem Aufwand verbunden, insbesondere, wenn sie sich auf weit in der Zukunft liegende Zeitpunkte oder -perioden beziehen.[1] Wenn die Kosten der Informationsbeschaffung nicht den Gewinn der mit ihrer Hilfe konzipierten Handlungsweise aufzehren sollen, werden die numerischen Informationen stets unvollständig und mit mehr oder weniger großen Ungenauigkeiten[2] behaftet sein. Dies wird besonders deutlich, wenn man sich z.B. den Versuch vorstellt, für einen Industriebetrieb sämtliche numerischen Parameter der Verbrauchs-, Belastungs- und Wiederholungsfunktionen aller Elementarkombinationen im Rahmen einer Produktionsfunktion vom Typ C im Sinne von Edmund Heinen zu ermitteln.[3] Oft muß man sich damit behelfen, auf die Ermittlung der numerischen Funktionsparameter ganz zu verzichten und stattdessen in tabellarischer Form einzelne Funktionselemente zusammenzustellen. Man denke etwa daran, daß in der Praxis wohl selten eine durchgehende Preis-Absatz-Funktion aufgestellt werden kann; vielmehr stellt man wenigen in Betracht kommenden Absatzpreisen die vermutlich realisierbaren Absatzmengen gegenüber. Auch "... wird sich die Kostenplanung - ebenso wie die Umsatzplanung - in der Regel nur auf einige wenige alternative Produktmengen erstrecken"[4].

---

1 Vgl. hierzu auch H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 221.

2 Ungenauigkeit wird in diesem Zusammenhang als Möglichkeit der Fehlerhaftigkeit verstanden.

3 Siehe E. Heinen, Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, Band I, Begriff und Theorie der Kosten, 2. Aufl., Wiesbaden 1965, S. 220-307.

4 G. Laßmann, Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung für die betriebswirtschaftliche Kostentheorie, Köln und Opladen 1958, S. 157.

Auch von der Informationsseite her sind also einer numerisch-exakten Optimumbestimmung Grenzen gesetzt.

b Möglichkeiten zur Überbrückung der Kluft zwischen Theorie und Praxis

Zwischen Theorie und Praxis besteht also eine Kluft. Heißt es dort "der Unternehmer maximiert ...", so stellt man andererseits fest, daß dies gar nicht möglich ist: "Evidently, organisms adapt well enough to 'satisfice' they do not, in general, 'optimize'."[1] Zur Überbrückung dieser Kluft gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder man geht von der deduktiven Theorie aus und sucht nach den erforderlichen Modifikationen, um sie der Praxis nutzbar zu machen, oder man versucht, intuitiv-induktiv von der Empirie ausgehend eine neue Theorie zu bilden. Die zweite Möglichkeit dokumentiert sich in den Bemühungen um die Erforschung von "Wahl-Mechanismen"[2] bzw. in der Formulierung "heuristischer Entscheidungsmodelle", in denen das tatsächliche Entscheidungsverhalten des Menschen nachgebildet wird. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit neigt jedoch mehr der ersten Möglichkeit zu. Der Überbrückung der Kluft zwischen Theorie und Praxis durch Entwicklung einer induktiven, d.h. von der Beobachtung des tatsächlichen Verhaltens ausgehenden neuen Theorie wird hier eine deduktive Konzeption der Entscheidungslehre vorgezogen. Denn einer induktiven Theorie ist

---

1 H.A. Simon, Models of Man, Social and Rational, New York-London 1961, S. 261.

2 Vgl. z.B. ebenda, S. 219ff., 241ff. und 261ff.

prinzipiell ein Mangel an eindeutiger Bestimmtheit ihrer Aussagen und die Gefahr der Fehlinterpretation beobachteten Verhaltens eigen. Ferner: Woher sollen neue Impulse für das Verhalten der Wirtschaftssubjekte kommen, wenn lediglich das bisherige Verhalten beschrieben wird? Im übrigen ist der Verfasser der Ansicht, daß eine Entscheidungslehre durchaus im Anschluß an die handlungsanalytische Theorie der Unternehmung, die aus klar formulierten Prämissen deduzierend zu logisch völlig abgesicherten Aussagen gelangt, entwickelt werden kann, ohne daß diese reformiert oder gar völlig verworfen werden muß. In welcher Weise dabei der Diskrepanz zwischen abstrahierenden Prämissen der Theorie und den empirischen Verhältnissen Rechnung getragen werden kann, dafür sei im folgenden Abschnitt ein Vorschlag unterbreitet.

c Die Methode der intuitiven Optimumbestimmung auf der Basis numerischer Suboptimierungen

(1) Das Problem der Wirtschaftlichkeitsrechnung über die Wirtschaftlichkeitsrechnung

Die Schwierigkeiten bei der Beschaffung von numerischen Informationen und der mit einer numerisch exakten Optimumbestimmung verbundene Rechenaufwand führen dazu, daß bei der Suche nach dem Optimum gewisse Ungenauigkeiten in der Überführung der empirischen Entscheidungssituation in ein mathematisch-formales Modell und bei der Berechnung innerhalb des Modells in Kauf zu nehmen sind.

Da der Genauigkeitsgrad der Wirtschaftlichkeitsrechnung und damit der Rechenaufwand sowie der Genauigkeitsgrad der Beschaffung von Detailinformationen und damit der Informationsbeschaffungs-Aufwand Merkmale der Unternehmungsweise im ganzen sind, wäre über den Genauigkeitsgrad der Optimumbestimmung in jedem

konkreten Einzelfall eine Entscheidung zu treffen. Eine solche Entscheidung könnte aber in streng rationaler Weise nur auf der Basis einer Wirtschaftlichkeitsrechnung über die Wirtschaftlichkeitsrechnung gefällt werden.

Dabei wären bei jeder Optimierungsmethode (einschließlich Umfang der Informationsbeschaffung) über die zu wählende Handlungsweise der Unternehmungsgewinn gegen den für die Wirtschaftlichkeitsrechnung und Informationsbeschaffung erforderlichen Aufwand abzuwägen. Im einzelnen müßten dazu folgende Komponenten bekannt sein: Der Unternehmungsgewinn, der sich nach einer Entscheidung auf der Basis der alternativen Entscheidungsmethoden ergibt, wäre die positive Komponente. Der Arbeitsaufwand für die Umformung der tatsächlichen Entscheidungssituation in ein den Anwendungsvoraussetzungen des jeweiligen Lösungsverfahrens entsprechendes Modell, der reine Rechenaufwand für die Lösung des Modells[1] sowie der Aufwand zur Informationsbeschaffung wären die negativen Komponenten. Die "optimale" Entscheidungsmethode wäre durch die maximale Differenz zwischen der positiven und den in geeigneter Weise zu quantifizierenden negativen Komponenten gekennzeichnet.

Eine solche Wirtschaftlichkeitsrechnung über die Wirtschaftlichkeitsrechnung wäre aber nur möglich, wenn sie nicht mehr benötigt wird. Darüberhinaus müßte, streng genommen, auch wieder die optimale Methode der Wirtschaftlichkeitsrechnung über die Wirtschaftlichkeitsrechnung bestimmt werden, worüber wiederum eine Wirtschaftlichkeitsrechnung anzustellen wäre, so daß sich ein unendlicher Regress ergeben würde. Wie leicht

---

1 Als "Lösung des Modells" sei hier, je nach der Entscheidungsmethode, die Ermittlung einer optimalen oder "befriedigenden" (dieser Begriff wird weiter unten geklärt) Niveaukombination der Variablen verstanden.

einzusehen ist, handelt es sich hierbei im Grunde um das gleiche Problem wie das Problem der Optimierung der Informationsbeschaffung bzw. der Bestimmung des Wertes einer Information.[1]

Im konkreten Falle ist daher die Bestimmung der "optimalen" Entscheidungsmethode, d.h. des "optimalen" Genauigkeitsgrades von Wirtschaftlichkeitsrechnung und numerischen Informationen nur einer originären Wertung zugänglich, d.h. die Entscheidung über die Frage, ob mit wenig Aufwand für Rechnung und Informationsbe-

---

1 Zur Bestimmung des Wertes einer Information wären zusätzliche Informationen nötig, über deren Wert wiederum Informationen erforderlich wären etc. Vgl. dazu z.B. E. Loitlsberger, Zum Informationsbegriff und zur Frage der Auswahlkriterien von Informationsprozessen, in: E. Loitlsberger (Hrsg.), Empirische Betriebswirtschaftslehre, Festschrift zum 60. Geburtstag von Leopold L. Illetschko, Wiesbaden 1963, S. 115-135. Die Ansätze auf diesem Gebiet haben z.T. nur rein definitorischen Charakter und beschränken sich auf formale Aussagen. Vgl. z.B. M.J. Beckmann, A Flow Model of Communication. Towards an Economic Theory of Information, Cowles Commission Discussion Paper No. 20, New Haven (Conn.) 1956; R.L. Ackoff, Towards a Behavioral Theory of Communication, Management Science, Band 4, 1958, S. 218-234, hier insbesondere S. 220-226; R.W. Llewellyn, A Game-Information Theoretic Decision Model, Journal of Industrial Engineering, Band 12, 1961, S. 159-162; J. Wild, Neuere Informationsforschung in betriebswirtschaftlicher Sicht. Internationale Forschungsansätze und -ergebnisse zur formalen Problematik der Ablauforganisation, Berlin 1967, S. 139-148; H. Albach, Entscheidungsprozeß und Informationsfluß in der Unternehmensorganisation, in: E. Schnaufer - K. Agthe (Hrsg.), Organisation, TFB-Handbuchreihe, Erster Band, Baden-Baden 1961, S. 355-402, hier S. 364-367 und die dort angegebene Literatur; H.W. Bierfelder, Optimales Informationsverhalten im Entscheidungsprozeß der Unternehmung, Berlin 1968, S. 110-118; zur Ungelöstheit dieses Problems siehe ferner: H. Meffert, Betriebswirtschaftliche Kosteninformationen. Ein Beitrag zur Theorie der Kostenrechnung, Wiesbaden 1968, S. 71; G. Gäfgen, Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung. Untersuchungen zur Logik und ökonomischen Bedeutung des rationalen Handelns, 2. Aufl. Tübingen 1968, S. 129.

schaffung eine approximative oder mit großem Aufwand eine möglichst exakte Lösung anzustreben ist, ist dem Gutdünken des Entscheidungsträgers überlassen.

(2) Zur Frage der Isomorphie zwischen Entscheidungssituation und Entscheidungsmodell

Anders als mit dem Rechenaufwand und dem Aufwand zur Beschaffung von numerischen Informationen verhält es sich mit der Beschaffung und Erfassung von Struktur-Informationen über die Entscheidungssituation.

Angesichts der Grenzen, die der numerisch-exakten Optimumbestimmung durch die Anwendungsvoraussetzungen gebräuchlicher Optimierungsverfahren gesetzt sind, wird häufig argumentiert, man könne bei der Formulierung eines mathematisch-formalen Modells Vereinfachungen gegenüber der empirischen Entscheidungssituation vornehmen. Und zwar müsse man von denjenigen Struktur-Informationen über das gegebene Problem, die zu den Anwendungsvoraussetzungen eines bestimmten aufgrund seiner einfachen Anwendbarkeit ins Auge gefaßten Optimierungsverfahrens im Widerspruch stehen, abstrahieren. Auf diese Weise könne man jedes empirisch gegebene Problem in einfacher Weise approximativ lösen.[1] "Der Praktiker löst dieses Problem häufig - irgendwie intuitiv - indem er eine einfachere Näherungslösung benutzt."[2] So könne man z.B. das Programmplanungsproblem dadurch vereinfachen, daß man

---

1 Siehe z.B. R. Howard, Dynamic Programming, Management Science, Serie A, Band 12, 1966, S. 317-348, hier S. 317.

2 "The practitioner often solves this problem - somewhat intuitively - by using a simpler approximate solution." F. Hanssmann, Operations Research in Production and Inventory Control, New York-London 1962, S. 5.

die Struktur-Informationen über die Möglichkeiten der Preispolitik ausklammert und von der Annahme auf gegebenem Niveau konstanter Absatzpreise ausgeht; oder man könne das Produktionsplanungsproblem vereinfachen, indem man eine Struktur-Information über die nichtlineare Gestalt der Kostenfunktion vernachlässigt und einen linearen Kostenverlauf unterstellt. Mit einem Satz: Man verzichtet in der Modellkonstruktion darauf, eine möglichst weitgehende Isomorphie zwischen Modell und Wirklichkeit herzustellen; man ignoriert vorhandene Informationen über die Problemstruktur der konkreten Entscheidungssituation, um ein einfaches Rechenverfahren anwenden zu können.

Diese Praktik geht zuweilen so weit, daß "von vorhandenen mathematischen Verfahren oder Modellen ausgehend Probleme in einer Form gelöst werden, die ökonomisch nicht sinnvoll bzw. nicht relevant ist. Statt das Verfahren dem untersuchten Problem anzupassen, verändert man das Problem so lange, bis es mit dem vorhandenen mathematischen Verfahren behandelt werden kann. Dies geschieht oft in der Weise, daß man die Funktionen, welche die untersuchten ökonomischen Zusammenhänge beschreiben sollen, a priori als gegeben annimmt (oft sogar mit sehr speziellen Formen). Wie diese Funktionen zu ermitteln sind, ob und unter welchen Voraussetzungen die unterstellte Form der Realität zu entsprechen vermag, wird nicht untersucht. Auf diese Weise wird ein Sachverhalt seiner eigentlichen ökonomischen Problematik entkleidet und auf ein rein mathematisches Problem (um nicht zu sagen eine reine Rechenaufgabe) reduziert..."[1]

---

1 L. Pack, Die Elastizität der Kosten, a.a.O., S. 16, Fußnote 2; siehe auch E. Heinen, "Einführung des Herausgebers" zu P. Vischer, Simultane Produktions- und Absatzplanung..., a.a.O., Abschnitt III (S. 7): "Dem Bestreben nach Kalkülisierung wurde in der Vergangenheit vielfach die Vollständigkeit der Modellformulierung geopfert."

Es erscheint einleuchtend, daß mit derartigen "Approximationen", d.h. Vereinfachungen des Modells gegenüber der empirischen Entscheidungssituation, deren Auswirkungen auf die Lösung ex ante nicht kontrollierbar sind,[1] nur zufällig die optimale Lösung des eigentlichen empirischen Problems gefunden werden kann. Dabei besteht die Gefahr, daß die mathematisch-exakte Lösung des nur "approximativ" der Entscheidungssituation isomorphen Modells einer von vornherein intuitiv bestimmten Lösung des gegebenen Problems nicht überlegen ist.[2]

Ein solches Vorgehen ist offensichtlich nicht zweckadäquat und kann der Unternehmungspraxis nicht von der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre empfohlen werden. Es ist verfehlt, von mathematischen Methoden und Modellen ausgehend nach wirtschaftlichen Anwendungen zu suchen[3] und in konkreten Entscheidungssituationen das Modell, das diese erfassen soll, auf ein gegebenes Rechenverfahren zuzuschneiden. Vielmehr ist umgekehrt von der konkreten Entscheidungssituation ausgehend nach einem geeigneten Verfahren zur Behandlung des Problems zu suchen. In diesem Sinne wird die "Überproduktion einer großen Anzahl unverifizierter mathematischer 'Modelle'"[4] ohne "Rücksicht

---

1 Vgl. z.B. W.S. Nemtschinow, Die Anwendung mathematischer Methoden in der ökonomischen Praxis, in: derselbe (Hrsg.), Anwendung mathematischer Methoden in der Ökonomie, Leipzig 1963, S. 10-36, hier S. 17; C.W. Kantorowitsch, Die Weiterentwicklung der mathematischen Methoden und die Perspektiven ihrer Anwendung in der Planung und Ökonomik, ebenda, S. 306-348, hier S. 344.

2 Siehe z.B. W.J. Baumol - R.C. Bushnell, Error produced by Linearization in Mathematical Programming, Econometrica, Band 35, 1967, S. 447-471; J. Pfanzagl, Die Minimisierung sinnloser Größen, Unternehmensforschung, Band 4, 1960, S. 149-155.

3 F. Hanssmann, Operations Research..., a.a.O., S. 3.

4 Ebenda, S. 4: "...overproduction of a large number of unverified mathematical 'models'...".

auf die Zulässigkeit der unterstellten Bedingungen"[1] von Hanssmann nicht ohne Berechtigung angeprangert.

Für die Konzeption der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre bedeutet dies folgendes: Approximationen sind zulässig (und oft unvermeidbar), soweit es die numerische Rechnung und die Beschaffung und Berücksichtigung von numerischen Informationen betrifft. Vereinfachungen in der Art, daß die Struktur der empirischen Entscheidungssituation entstellt wird, daß diese also in dem Modell gar nicht mehr adäquat abgebildet wird, sind verfehlt. Jede Vereinfachung in diesem Sinne bedeutet nämlich den Verzicht auf Informationen, die über die empirische Entscheidungssituation vorliegen. Verzichtet man aber von vornherein, d.h. vor der eigentlichen Optimumbestimmung auf Informationen über die Problemstruktur, so kann man nicht erwarten, mit der Modellösung die in bezug auf die tatsächliche Situation optimale Konstellation der Handlungsvariablen ermitteln können.

Nun soll hier keineswegs behauptet werden, Optimierungsverfahren, die nur auf vereinfachende, die empirische Problemstruktur approximativ wiedergebende Modelle anwendbar sind, seien schlechthin abzulehnen. Damit würde man übersehen, daß die Unternehmensforschung nicht allein auf ökonomische Anwendungen ausgerichtet ist. Ihre Wurzeln liegen bekanntlich u.a. in Leontiefs Input-Output-Matrix[2], der Spieltheorie[3],

---

1 F. Hanssmann, Operations Research..., a.a.O., S. 3: "...view to the feasibility of implementing research results.

2 Vgl. M.K. Wood - G.B. Dantzig, The Programming of Interdependent Activities: General Discussion, in: T.C. Koopmans (Hrsg.), Activity Analysis of Production and Allocation, Proceedings of a Conference (1. Aufl. New York-London 1951), 3. Aufl. New York-London 1957, S. 15-18, hier S. 15.

3 Vgl. G.B. Dantzig, A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem, ebenda, S. 330-335.

in Entscheidungsproblemen des militärischen Bereichs[1], der Matrix-Algebra[2] und der Geometrie multidimensionaler Räume[3]. Ebenso heterogen wie der Ursprung der Methoden der Unternehmensforschung sind auch ihre Anwendungsbereiche.

Darüber hinaus können auch solche Methoden, die nur auf einfach strukturierte Modelle anwendbar sind, durchaus der Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre gerecht werden. Häufig sind die verfügbaren Informationen über die empirische Problemstruktur so spärlich, daß kompliziertere Modelle gar nicht konstruierbar oder mit konkreten Daten ausfüllbar sind. Wenn aber ausführlichere Informationen vorliegen, so erscheint es verfehlt, auf diese von vornherein zu verzichten, indem man das Modell auf ein einfaches Lösungsverfahren zuschneidet.

(3) Zur Frage der adäquaten Entscheidungsmethode

Das Streben nach größtmöglicher Isomorphie zwischen dem Entscheidungsmodell und der konkreten Entscheidungssituation wird vielfach dazu führen, daß zur Lösung des Modells kein exaktes Optimierungsverfahren zur Verfügung steht. In solchen Fällen bleibt dem Entscheidungsträger nichts anderes übrig, als sich

---

1 Vgl. z.B. C.J. Thomas, Military Gaming, in: R.L. Ackoff (Hrsg.), Progress in Operations Research, Band I, New York-London 1961, S. 421-463, hier insbesondere S. 425-434; G.B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton (N.J.) 1963, S. 12ff.

2 Vgl. z.B. G.B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, a.a.O., S. 20.

3 Vgl. z.B. W. Wittmann, Lineare Programmierung und traditionelle Produktionstheorie, Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, 12. Jg. (NF) 1960, S. 1-17, hier S. 1.

mit einer approximativen Lösung des Modells zu begnügen, die bei richtiger Modellformulierung gleichzeitig eine approximative Lösung des gegebenen Problems darstellt.

Aber auch in Fällen, in denen ein Optimierungsverfahren zur Verfügung steht, das von seinen Anwendungsvoraussetzungen her prinzipiell zur numerisch exakten Lösung des Problems geeignet ist, kann der Entscheidungsträger in Ansehung des Rechen- und Informationsaufwandes in intuitiver Entscheidung auf den größtmöglichen Genauigkeitsgrad der numerischen Optimumbestimmung verzichten.

Dies sind die Situationen, in denen heuristische Planungsverfahren[1] und Simulationsverfahren[2], z.B. das Verfahren, daß der Verfasser im Abschnitt D der vorliegenden Arbeit zur Diskussion stellen wird, anstelle exakter Optimierungsverfahren zur Anwendung gelangen müssen. Anstatt um jeden Preis solange zu rechnen, bis man mit Sicherheit die absolut optimale Modellösung

---

1 Zur Einführung in heuristische Planungsmethoden siehe z.B. C.A. Zehnder, Das Prinzip der heuristischen Methoden, in: F. Weinberg - C.A. Zehnder (Hrsg.), Heuristische Planungsmethoden, Nr. 13 von M. Beckmann - H.P. Künzi (Hrsg.), Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Heidelberg 1969, S. 7-22.

2 H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O., S. 887-922, insbesondere S. 887, 891; W.E. Duckworth, A Guide to Operational Research, London 1962, S. 40, 52; A. Vazsonyi, Die Planungsrechnung..., a.a.O., S. 29f., 314, 337; H. Müller-Merbach, Operations Research. Methoden und Modelle der Optimalplanung, Berlin-Frankfurt 1969, S. 414-418; R.C. Meier - W.T. Newell - H.L. Pazer, Simulation in Business and Economics, Englewood Cliffs (N.J.) 1969, hier insbesondere S. 21f.; G.A. Korn, Hybrid Computer Monte Carlo techniques, in: J. McLeod (Hrsg.), Simulation. The Dynamic Modeling of Ideas and Systems with Computers, New York-San Francisco-Toronto-London-Sydney 1968, S. 223-234, hier S. 231.

erreicht hat, begnügt man sich mit einer "befriedigenden" Lösung des Modells und damit des gegebenen Problems. Als "befriedigend" sei dabei die beste derjenigen Lösungen bezeichnet, die man bei gegebenem Umfang und Genauigkeitsgrad der Detail-Informationen mit einem vorgegebenen Rechenaufwand (z.B. vorgegebener Rechenzeit auf einem elektronischen Rechenautomaten) ermitteln kann. In günstigen Fällen mag dabei die Rechenzeit so groß bemessen sein bzw. der erforderliche Rechenaufwand so gering sein und mögen die numerischen Informationen so vollständig und exakt sein, daß die "befriedigende" Lösung gleichzeitig die optimale Handlungsweise angibt.

Da der Genauigkeitsgrad der Datenerfassung und -verarbeitung das Ergebnis einer Entscheidung ist, ist sich der Entscheidungsträger dessen bewußt, daß die approximative Wirtschaftlichkeitsrechnung nicht die optimale Handlungsweise angibt. An der "befriedigenden" Modellösung wird er daher in intuitiver Entscheidung gewisse Modifikationen vornehmen, um die in subjektiver Sicht, d.h. entsprechend den Vorstellungsinhalten des Entscheidungsträgers optimale Handlungsweise zu bestimmen. Die Optimierungsmethode bezüglich der Unternehmungsweise im ganzen, die hier vorgeschlagen wird, besteht also aus folgenden Stufen:

Zunächst wird unter Abwägung von primärem Unternehmungsgewinn und Aufwand für die Informationsbeschaffung und Wirtschaftlichkeitsrechnung in intuitiver Entscheidung der optimale Genauigkeitsgrad der Wirtschaftlichkeitsrechnung über die primäre Handlungsweise festgelegt. Unter primärem Unternehmungsgewinn wird hier der Bruttogewinn aus der primären Handlungsweise verstanden, d.h. diejenige Gewinnziffer, die sich ohne Berücksichtigung des Aufwandes für Informationsbeschaffung und Wirtschaftlichkeitsrechnung errechnet. Er entspricht dem Gewinnbegriff der

(handlungsanalytischen) Theorie der Unternehmung, die ja von vollständiger und detaillierter Datenvorstellung sowie völlig müheloser Optimumbestimmung ausgeht. Die primäre Handlungsweise umfaßt die zur Entscheidung anstehenden unternehmerischen Handlungen mit Ausnahme der Informationsbeschaffung und Wirtschaftlichkeitsrechnung.

Die zweite Stufe ist die approximative Wirtschaftlichkeitsrechnung über die primäre Handlungsweise, d.h. die numerische Bestimmung einer "befriedigenden" oder der besten mit dem gegebenen Informations- und Rechenaufwand bestimmbaren Lösung des Problems. Dabei werden alle Struktur-Informationen über das Problem verarbeitet; nicht das Entscheidungsmodell wird auf die Anwendungsvoraussetzungen einer numerisch-exakten Optimierungsmethode zugeschnitten, sondern es wird ein der unverfälschten Struktur des konkret anstehenden Problems adäquates Verfahren zur Bestimmung der optimalen oder notfalls auch nur "befriedigenden" Modelllösung angewendet.

Schließlich wird der Unvollkommenheit der numerischen Informationen und der Ungenauigkeit der numerischen Wirtschaftlichkeitsrechnung Rechnung getragen, indem das numerisch bestimmte Suboptimum in intuitiver Entscheidung in das der Vorstellung des Entscheidungsträgers entsprechende absolute Optimum überführt wird. Dabei werden gegebenenfalls auch die nicht quantifizierbaren Nebenziele wie Pflege eines besonderen Image's der Unternehmung, Wahrung von Traditionen und dgl. berücksichtigt.

(4) Objektive und subjektive Rationalität

Es ist nun zu fragen, inwieweit die beschriebene Methode dem Zweck der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre entspricht. Genauer: Wird mit einem solchen Vorgehen die Hauptaussage der Theorie der Unternehmung, der Unternehmer maximiere den Gewinn, verifiziert, wird also diese Aussage der Praxis nutzbar gemacht? Da die Theorie der Unternehmung mit der Rationalitätshypothese arbeitet, kann man diese Frage auch so formulieren: Handelt der Unternehmer, der in dieser Weise entscheidet, rational?

Wenn oben von der Bestimmung "befriedigender" Lösungen gesprochen wird, so scheint es auf den ersten Blick, als müsse die Antwort auf diese Frage negativ sein. Eine kurze Auseinandersetzung mit dem Begriff der Rationalität verschafft hier Klarheit.

Und zwar ist zwischen einer älteren und einer neueren Begriffsfassung zu unterscheiden, zwischen den Begriffen der objektiven und der subjektiven Rationalität. Objektive Rationalität bedeutet: Das Subjekt handelt so, daß mit gegebenen Mitteln der objektiv höchstmögliche Zielerreichungsgrad verwirklicht wird.[1]

Subjektive Rationalität bedeutet: Das Subjekt basiert seine Entscheidungen ausschließlich auf Bewußtseinsinhalte[2] und handelt so, wie es glaubt den höchst-

---

1 Vgl. z.B. L. Pack, Rationalprinzip und Gewinnmaximierungsprinzip, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 31. Jg. 1961, Teil I: S. 207-220, Teil II: S. 283-290, hier S. 207; E. Heinen, Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, a.a.O., S. 28f. Die Tatsache, daß Rationalität meist in der normativen Gestalt einer Handlungsmaxime ("Rationalprinzip") definiert wird, sei hier nur am Rande erwähnt.

2 Siehe H. Koch, Die Theorie der Unternehmung..., a. a.O., S. 391; derselbe, Über eine allgemeine Theorie des Handelns, a.a.O., S. 394.

möglichen Zielerreichungsgrad verwirklichen zu können.[1]

Objektive Rationalität ist eine Idealannahme, für die es in der Empirie keine Parallele gibt. Die tatsächlichen Wahlhandlungen entsprechen praktisch nie dem tatsächlich absolut optimalen Mitteleinsatz. "Rationalität verlangt vollständiges Wissen und restlose Vorausberechnung der Folgen jeder Entscheidung. Tatsächlich ist das Wissen davon immer fragmentarisch."[2,3]

In Ansehung der informatorischen und rechentechnischen Schwierigkeiten der absoluten Optimumbestimmung kann allein der Begriff der subjektiven Rationalität als empirisch gehaltvoll angesehen werden. Und diesem Rationalitätsbegriff entspricht - so meint der Verfasser - die oben skizzierte Entscheidungsmethode. Da die Wirtschaftlichkeitsrechnung über die Wirtschaftlichkeitsrechnung, wie oben gezeigt, prinzipiell unmöglich ist, die Wirtschaftlichkeitsrechnung mit ihrem Aufwand jedoch Teil der Unternehmungsweise im ganzen ist, stellt sie die einzige Möglichkeit dar, diese im ganzen zu optimieren. Indem der Unternehmer

---

1 Vgl. H.A. Simon, Das Verwaltungshandeln. Eine Untersuchung der Entscheidungsvorgänge in Behörden und privaten Unternehmen. Heft 12 von Verwaltung und Wirtschaft, Schriftenreihe der Westfälischen Verwaltungs- und Wirtschaftsakademien, Stuttgart 1955, S. 53-55; derselbe, Models of Man, Social and Rational, New York-London 1957, S. 196ff., 256; G. Gäfgen, Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung, Untersuchungen zur Logik und ökonomischen Bedeutung des rationalen Handelns, Tübingen 1963, S. 22-36, insbesondere S. 34.

2 H.A. Simon, Das Verwaltungshandeln, a.a.O., S. 56f.

3 Daß im übrigen vollkommenes Wissen prinzipiell unmöglich, ja daß sogar die Annahme vollkommener Voraussicht paradoxe Implikationen hat, zeigt besonders anschaulich Morgenstern's Beispiel von Sherlock Holmes und Moriarta. O. Morgenstern, Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft, Wien-München 1963, S. 51f.

auf der Basis seiner Vorstellungsinhalte den optimalen Genauigkeitsgrad der Wirtschaftlichkeitsrechnung festlegt, diese situationsadäquat mit den gegebenen numerischen Informationen und Rechenaufwand durchführt und schließlich das Ergebnis entsprechend seinen Vorstellungen von nicht quantifizierbaren Nebenzielen modifiziert, verwirklicht er den in seiner Vorstellung größtmöglichen Grad der Zielerreichung. Der Umstand, daß er sich im Rahmen der numerischen Wirtschaftlichkeitsrechnung u.U. mit einer "befriedigenden" Lösung begnügt, steht dem nicht entgegen. Ebenso wie in der Theorie der Unternehmung die Maximierung des primären Gewinns (nur dieser wird, da die sekundären Handlungen Informationsbeschaffung und Wirtschaftlichkeitsrechnung mit den Annahmen der vollständigen detaillierten Datenvorstellung ausgeklammert werden, in der Theorie der Unternehmung betrachtet)[1] aus dem Streben nach einem Idealziel und der Mittelknappheit folgt,[2] gilt bezüglich der sekundären Handlungen (Informationsbeschaffung und Wirtschaftlichkeitsrechnung): Wenn aus technischen Gründen die gewinnmaximale Konstellation der primären Unternehmungsvariablen nicht ermittelt werden kann, dann muß man versuchen, dieser mit den vorhandenen Mitteln an Detail-Informationen und Rechenaufwand so nahe wie möglich zu kommen, sich also mit einer "befriedigenden" Lösung im oben definierten Sinne begnügen. Man könnte hier von einem Gewinnmaximierungsprinzip zweiter Ordnung sprechen.

Im Rahmen der oben skizzierten Methode der intuitiven Optimumbestimmung auf der Basis einer numerischen Suboptimierung mit intuitiv festgelegtem Genauigkeitsgrad ist also der Zweck der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre dann und nur dann erfüllt, wenn es gelingt, numerische Verfahren anzu-

---

1 Vgl. S.30f.dieser Arbeit.

2 Vgl. H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 22, 26.

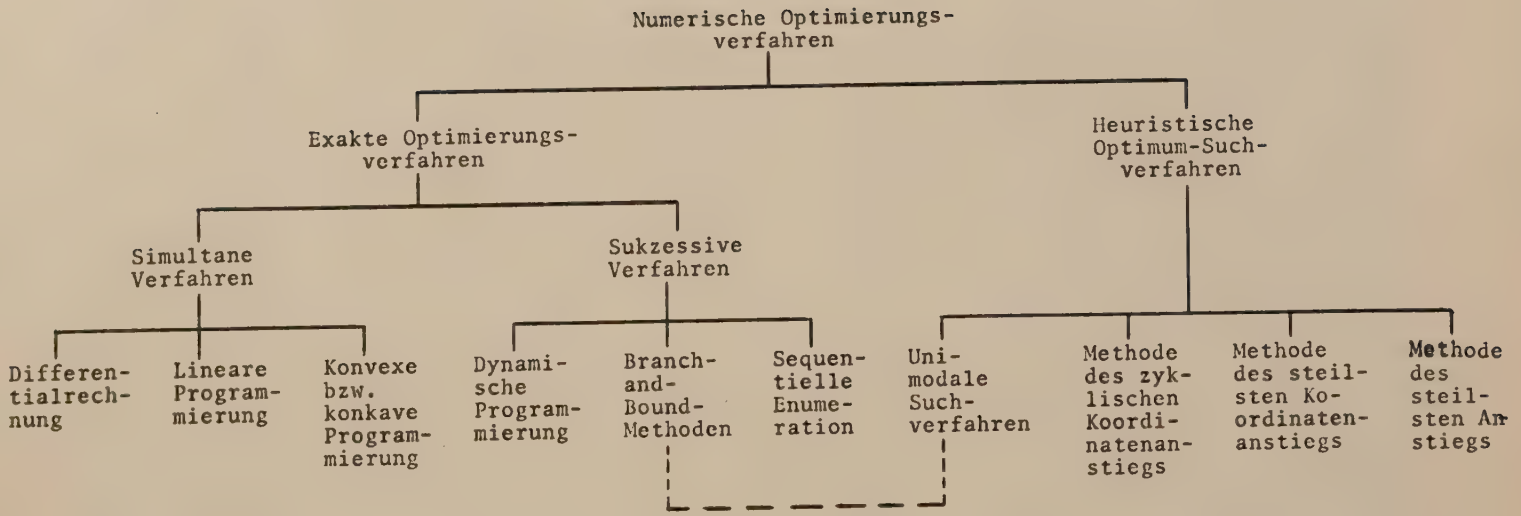
geben, nach denen jedes konkrete Entscheidungsproblem in einem unverfälscht die empirische Situation wiedergebenden (d.h. keine Struktur-Informationen über die Problemstruktur aus Gründen mathematischer Konvenienz vernachlässigenden) Modell behandelt werden kann, sei es - idealerweise - im Sinne der numerischen Optimierung oder sei es auch nur im Sinne der Bestimmung einer "befriedigenden" Lösung. Zu zeigen, daß dies bis heute nicht der Fall ist, und einen Beitrag zur Erfüllung der Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre zu leisten, ist das Anliegen des Verfassers bei den folgenden Ausführungen.

2 Die bekannten Optimierungsverfahren und ihre Anwendungsvoraussetzungen

a Ein Gliederungsversuch

Weiter oben wurde behauptet, daß die Anwendungsvoraussetzungen der bekannten Optimierungsverfahren in vielen Fällen nicht den Struktureigenschaften empirischer Entscheidungsprobleme bzw. der ihnen isomorphen Modelle entsprechen. Diese These soll nun im folgenden erhärtet werden. Dazu möge ein Streifzug durch den gesamten Bereich der Verfahren numerisch-exakter Optimumbestimmung dienen, bei dem allerdings die Darstellung nur so weit gehen soll, daß die Grenzen der Anwendungsmöglichkeiten der einzelnen Verfahren deutlich werden und in den nachfolgenden Abschnitten mit den Struktureigenschaften empirischer Probleme konfrontiert werden können.

Die Übersicht möge durch das folgende Gliederungsschema (S. 36) der numerischen Optimierungsverfahren erleichtert werden.


Numerische Optimierungs-verfahren
Exakte Optimierungs-verfahren
Heuristische Optimum-Such-verfahren
Simultane Verfahren
Sukzessive Verfahren
Differen-tialrech-nung
Lineare Program-mierung
Konvexe bzw. konkave Program-mierung
Dynami-sche Program-mierung
Branch-and-Bound-Methoden
Sequen-tielle Enume-ration
Uni-modale Such-verfahren
Methode des zyk-lischen Koordi-natenan-stiegs
Methode des steil-sten Ko-ordinaten-anstiegs
Methode des steil-sten An-stiegs

Dieses Schema erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, insbesondere was eine detaillierte Aufgliederung angeht, bei der Vollständigkeit schon aus räumlichen Gründen nicht erreicht werden kann. Auch wurde auf die Darstellung der bestehenden Querverbindungen verzichtet,[1] z.B. zwischen der dynamischen Programmierung und der Differentialrechnung oder zwischen den Methoden des steilsten Anstiegs bei den heuristischen Suchverfahren und den Methoden zulässiger Richtungen der konvexen Programmierung. Die erstgenannte Querverbindung besteht darin, daß die Differentialrechnung ja unter bestimmten Voraussetzungen für die Stufenoptimierungen im Rahmen der dynamischen Programmierung herangezogen werden kann. Die an zweiter Stelle genannte Querverbindung besteht in der Analogie in der Organisation des Suchvorganges. Die Berücksichtigung dieser und vieler weiterer Querverbindungen würde das Schema nur unübersichtlich machen und für den Zweck des Abschnittes - Herausstellung der Anwendungsvoraussetzungen der einzelnen Verfahren - keinen Nutzen bringen. Wegen der Existenz dieser Querverbindungen stellt das Schema von S. 36 selbstverständlich nicht die einzig mögliche Gliederung dar.[2]

Die hier gewählte Gliederungsform folgt den nachstehend aufgeführten Kriterien: Auf der ersten Ebene wurde nach dem Genauigkeitsgrad der numerischen Optimumbestimmung gegliedert. Bei den exakten Optimierungsverfahren kann bewiesen werden, daß unter den für sie geltenden Anwendungsvoraussetzungen mit Sicherheit die bestmögliche Lösung bestimmt wird. Die heuristischen Such-

1 Die wesentlichsten Querverbindungen werden aber bei der Besprechung der einzelnen Verfahren angedeutet.

2 Vgl. z.B. die unter einem anderen Gesichtspunkt vorgenommene Gliederung der Methoden der Optimumbestimmung bei H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 183-225.

verfahren[1] determinieren nicht mit Sicherheit die optimale Lösung, doch ist eine Tendenz zur Konvergenz auf ein Optimum plausibel. Der Grund für die mangelnde Beweisbarkeit liegt hier darin, daß eine möglichst große Isomorphie zwischen der empirischen Entscheidungssituation und dem mathematisch-formalen Modell angestrebt wird, ohne mit Rücksicht auf mathematische Konvenienz einen Beweis erleichternde aber den Anwendungsbereich einschränkende Voraussetzungen einzuführen. Das Ziel besteht hier darin, durch systematische Suche möglichst nahe an die optimale Lösung des empirischen Problems heranzukommen, d.h. nach der hier gewählten Terminologie, eine "befriedigende" Lösung zu bestimmen. Als drittes hätten noch Simulationsverfahren[2] eingefügt werden können. Sie werden angewandt, um anhand von möglichst genauen situationsbeschreibenden Modellen die Auswirkungen weniger alternativer, intuitiv oder aufgrund allgemeiner Entscheidungsregeln konzipierter Handlungsweisen auszutesten und so eine "brauchbare" Lösung zu finden. Ihre Behandlung würde aber den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen.

---

1 Zur Einführung in heuristische Verfahren, insbesondere zu problemorientierten Spezialverfahren, auf die in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen wird, siehe C.A. Zehnder, Das Prinzip der heuristischen Methoden, in: F. Weinberg-C.A. Zehnder (Hrsg.), Heuristische Planungsmethoden, Nr. 13 von M. Beckmann-H.P. Künzi (Hrsg.), Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Heidelberg 1969, S. 7-22; H. Müller-Merbach, Operations Research. Methoden und Modelle der Optimalplanung, Berlin-Frankfurt/M. 1969, S. 273-307.

2 Siehe hierzu z.B. R.C. Meier-W.T. Newell-H.L. Pazer, Simulation in Business and Economics, a.a.O., J. McLeod (Hrsg.), Simulation. The Dynamic Modeling of Ideas and Systems with Computers, a.a.O.; R. Koxholt, Die Simulation, ein Hilfsmittel der Unternehmensforschung, Begriff, Methodik und Technik der Durchführung, Möglichkeiten der Anwendung, München-Wien 1967; J. Hesselbach-L.M. Eisgruber, Betriebliche Entscheidungen mittels Simulation, Berlin 1967.

Die Untergliederung auf der zweiten Ebene bei den exakten Optimierungsverfahren orientiert sich an charakteristischen Organisationsprinzipien der Optimumbestimmung. Und zwar geht es darum, daß bei den simultanen exakten Optimierungsverfahren iterativ komplette Lösungen gebildet werden bis die optimale Lösung gefunden ist, während bei den sukzessiven Verfahren versucht wird, schrittweise die optimale Lösung aufzubauen.[1]

Die Untergliederung der letzten Ebene stellt eine, wenn auch unvollständige und weiterer Aufspaltung bedürftige, Aufzählung dar. Die Auswahl erfolgte teils nach Anwendungsvoraussetzungen, teils nach enger umrissenen Organisationsprinzipien, insgesamt aber nach den Zusammenfassungsmöglichkeiten bei der folgenden Besprechung.

Die Einordnung der unimodalen Suchverfahren ist problematisch. Einerseits fallen hierbei die Organisationsprinzipien der anderen Suchverfahren zusammen; deshalb wurden sie als besondere Kategorie der heuristischen Optimum-Suchverfahren aufgefaßt. Andererseits gehören sie unter speziellen Voraussetzungen durchaus zu den exakt beweisbaren Optimierungsverfahren.

---

1 Diese Einteilung entspricht in etwa der Unterscheidung zwischen Verfahren der ungeteilten und der geteilten Optimierung. Siehe H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 183-225.

b Problemorientierte Spezialverfahren

Für verschiedene Einzelprobleme der Betriebswirtschaftslehre sind Spezialverfahren zur Optimumbestimmung entwickelt worden. Gedacht sei etwa an Spezialverfahren zur Optimierung in Reihenfolgeproblemen wie der Dijkstra-Algorithmus[1] zur Bestimmung optimaler Wege in Netzen oder der Algorithmus von Floyd[2] zur Berechnung optimaler Netze. Gedacht sei ferner an spezielle Anwendungen des Marginalprinzips wie z.B. Jacobs[3] Lösungsweg zur Bestimmung der Minimalkostenkombination der Anpassungsprozesse oder an die Anwendung der "Einsetzungsmethode"[4] auf bestimmte "Funktionalkriterien"[5] wie etwa die klassische Bestellmengenformel.[6]

---

1 E.W. Dijkstra, A Note on two Problems in Connexion with Graphs, Numerische Mathematik, Band 1, 1959, S. 269-271, zitiert nach H. Müller-Merbach, Optimale Reihenfolgen, Berlin-Heidelberg-New York 1970, S. 39 und S. 214.

2 R.W. Floyd, Algorithm 97, Shortest Path, Comm. ACM, Band 5, Heft 6, 1967, S. 345, zitiert nach H. Müller-Merbach, a.a.O., S. 47 und S. 215.

3 Hierauf, z.B., bezieht sich die Anmerkung zum Gliederungsschema auf S. 36. Man könnte hier von einer Anwendung der Differentialrechnung sprechen, doch rechtfertigt die Art und Weise, in der Jacob die Lösung konkretisiert, die Einordnung als spezielles Verfahren. Siehe H. Jacob, Produktionsplanung und Kostentheorie, in: H. Koch (Hrsg.), Zur Theorie der Unternehmung, Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg, Wiesbaden 1962, S. 205-268, hier S. 212-227.

4 H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 197f.

5 Ebenda, S. 195.

6 Siehe z.B. D. Adam, Produktionsplanung bei Sortenfertigung. Ein Beitrag zur Theorie der Mehrproduktunternehmung, Band 1 von H. Jacob (Hrsg.), Schriftenreihe des Instituts für Unternehmensforschung und des Industrieseminars der Universität Hamburg, Wiesbaden 1969, S. 57; L. Pack, Optimale Bestellmenge und optimale Losgröße. Zu einigen Problemen ihrer Ermittlung, Wiesbaden 1964, S. 14; H. Schlüter, Zum Problem der optimalen Losgröße, Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, 6. Jg. (NF), 1954, S. 188-203. Die Formel, die hier gemeint ist, wird in der Literatur meist als Losgrößenformel

Es versteht sich von selbst, daß mit solchen Spezialverfahren nur wenige Sonderfälle eng begrenzter unternehmerischer Entscheidungsprobleme behandelt werden können. Es erübrigt sich daher, an dieser Stelle auf ihre Funktionsweise und Anwendungsvoraussetzungen im einzelnen einzugehen. Dies um so mehr, als es sich dabei im Grunde um spezifizierte Anwendungstechniken der nachfolgend zu besprechenden Verfahren handelt.

Neben Spezialverfahren, die nur auf die Probleme anwendbar sind, für die sie entwickelt wurden, gibt es auch problemorientiert konzipierte Optimierungsverfahren, deren Anwendungsbereich jedoch über das jeweilige Ausgangsproblem hinausreicht. Zum Beispiel sind die "Transportmethoden" der Linearen Programmierung, wie der Name sagt, ursprünglich zur Lösung spezieller Transportprobleme entwickelt worden. Indessen gibt es einerseits auch Transportprobleme, die mit den "Transportmethoden" nicht behandelt werden können, andererseits sind auch andere, ähnlich strukturierte Probleme einer Lösung mittels einer Transportmethode zugänglich. Allerdings ist auch bei der Anwendung von Transportmethoden häufig die Beobachtung zu machen, daß man von dem Verfahren ausgehend nach Anwendungsmöglichkeiten in entsprechend zugeschnittenen Modellen sucht und dabei Ungenauigkeiten in der Modellfor-

---

bezeichnet und wurde ursprünglich auch zur Beschreibung der optimalen Losgröße konzipiert. Vgl. z.B. den historischen Abriß bei W. Dinkelbach, Zum Problem der Produktionsplanung in Ein- und Mehrproduktunternehmen, Einzelschrift Nr. 4 von A. Adam (Hrsg.), Unternehmensforschung für die Wirtschaftspraxis, Würzburg-Wien 1964, S. 12ff. und die dort genannte Literatur. Da diese Formel aber, wie Adam nachweist, von unrealistischen Modellprämissen ausgeht, kann ihr praktische Bedeutung nur in bezug auf die Bestellmenge zukommen. Vgl. D. Adam, Produktionsplanung bei Sortenfertigung, a.a.O., Vorwort (S. 7) und S. 84ff.

mulierung in Kauf nimmt.[1] Die meisten bekannten Optimierungsverfahren gehen jedoch nicht von konkreten Entscheidungsproblemen aus sondern sind abstrakt für durch bestimmte Eigenschaften gekennzeichnete Klassen von Optimierungsaufgaben konzipiert worden. Die folgenden Ausführungen sollen die Begrenztheit des Anwendungsbereiches auch der problemunabhängig konzipierten Optimierungsverfahren deutlich machen.

c Exakte Simultan-Optimierungsverfahren

(1) Differentialrechnung

Die Betriebswirten wohl geläufigste Methode der Optimumbestimmung dürfte die Anwendung der Differentialrechnung sein. Das Verfahren basiert auf der an sich trivialen Feststellung, daß vom Gipfel eines Berges aus kein Weg mehr nach oben führt, bzw. daß ein über den Gipfel führender Weg in seinem höchsten Punkt keine Steigung hat. Formal heißt dies: Ein Maximum einer Funktion zeichnet sich dadurch aus, daß der Gradient (der Vektor der partiellen ersten Ableitungen) an dieser Stelle gleich Null ist. Durch Nullsetzen der partiellen ersten Ableitungen nach allen n Variablen und Auflösen des dadurch gewonnenen Systems von n Bestimmungsgleichungen erhält man eine Niveaukombination

1 Will man z.B. das Produktionsplanungsproblem bei saisonalen Absatzschwankungen mit Hilfe einer Transportmethode lösen, so erfordert die Modellformulierung die Überführung einer kontinuierlichen Preis-Absatz-Funktion in eine Reihe von Absatzmengen endlicher Teilperioden. Vgl. z.B. G.T. Bishop, On a Problem of Production Scheduling, Operations Research, Band 5, 1957, S. 97-103; F. Hanssmann, Operations Research in Production and Inventory Control, a.a.O., S. 114f. Auf weitere notwendige Vereinfachungen weist Bowman hin, E.H. Bowman, Production Scheduling by the Transportation Method of Linear Programming, Operations Research, Band 4, 1956, S. 100-103, hier S. 102.

der n Variablen, die dieses Kriterium erfüllt.[1] Ist in einem gegebenen Maximierungsproblem bekannt, daß die Zielfunktion[2] pseudokonkav ist, d.h. nur ein einziges Maximum und weder Sattelpunkte[3] noch Minima aufweist,[4] so ist das obengenannte Kriterium notwendig und hinreichend. Mit dem skizzierten Verfahren kann also ein gegebenes Maximierungsproblem gelöst werden.

Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so sind zusätzliche Operationen erforderlich. Das Gleichungssystem der gleich Null gesetzten partiellen Ableitungen hat dann mehrere Lösungen, von denen i.d.R. nur eine optimal ist. Sattelpunkte und Minima können aus der Menge dieser Lösungen durch Prüfung der hinreichenden Bedingung für das Vorliegen eines Maximums eliminiert werden: Die Hessesche Determinante (die Matrix der partiellen zweiten Ableitungen) muß negativ semidefinit sein.[5] Gib es mehr als eine Lösung, die die notwendige und die hinreichende Bedingung erfüllt, d.h. weist die Zielfunktion mehrere lokale

---

1 Vgl. z.B. R.G.D. Allen, Mathematik für Volks- und Betriebswirte. Eine Einführung in die mathematische Behandlung der Wirtschaftstheorie, Berlin 1956, S. 189ff.; F. Sommer, Einführung in die Mathematik für Studenten der Wirtschaftswissenschaften, 2. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York 1967, S. 176ff.; H. Müller-Merbach, Operations Research, Methoden und Modelle der Optimalplanung, Berlin-Frankfurt/M. 1969, S. 53ff.

2 Vgl. S. 9 dieser Arbeit.

3 Unter einem Sattelpunkt ist hier ein Wendepunkt zu verstehen, in dem der Gradient gleich Null ist. Vgl. F. Sommer, Einführung in die Mathematik..., a.a.O., S. 177.

4 Geht es um die Bestimmung eines Minimums, so ist entsprechend Pseudokonvexität vorauszusetzen.

5 Vgl. z.B. W.I. Zangwill, Nonlinear Programming. A Unified Approach, Englewood Cliffs (N.J.) 1969, S. 30.

Maxima[1] auf, so kann das Maximum Maximorum oder, wie es im folgenden genannt werden soll, das globale Maximum nur durch den Vergleich der Zielfunktionswerte dieser Lösungen identifiziert werden.

Nebenbedingungen können bei der Optimumbestimmung mittels der Differentialrechnung durch Lagrange-Multiplikatoren berücksichtigt werden. Sind m Nebenbedingungen zu berücksichtigen, so werden diese nach Null aufgelöst, mit zusätzlichen Variablen λ_j (j=1...m) multipliziert und an die Zielfunktion angehängt.[2] Für die so erweiterte Zielfunktion wird das Maximum in der oben skizzierten Weise bestimmt.[3]

Voraussetzung für eine erfolgreiche Anwendung der Differentialrechnung zur Maximierung einer Funktion von n Variablen unter Nebenbedingungen ist selbstverständlich, daß die Zielfunktion an allen Stellen im durch die Nebenbedingungen begrenzten Lösungsbereich sowie alle Nebenbedingungen differenzierbar sind.

---

1 Ein lokales Maximum der Zielfunktion f liegt in einem gegebenen Punkt y^+ vor, wenn kein benachbarter Punkt y einen höheren Zielfunktionswert aufweist. Benachbarte Punkte des Punktes y^+ sind in stetigen Problemen alle Punkte einer beliebig engen Umgebung von y^+, d.h. alle Punkte y, die sich im Niveau einer oder mehrerer Variabler um einen beliebig kleinen Betrag von y^+ unterscheiden, in diskreten Problemen alle zulässigen Punkte der engsten Umgebung U von y^+, d.h. alle Punkte y, die sich im Niveau einer oder mehrerer Variabler um die kleinstzulässige Differenz von y^+ unterscheiden. Formal: $f(y^+) = \max[f(y)]$ wenn $\exists\, U(y^+)$ mit $f(y) \leq f(y^+)$ für alle $y \in U(y^+)$. Eine Funktion kann mehrere Maxima aufweisen. Gesucht ist stets dasjenige lokale Maximum, in dem der Zielfunktionswert am größten ist, d.i. das globale Maximum.

2 Eine Nebenbedingung $g_j(y) = C$ wird durch den Zusatz $+\lambda_j[g_j(y)-C]$ zur Zielfunktion ersetzt.

3 Siehe z.B. R.G.D. Allen, Mathematik..., a.a.O., S. 378ff.; H. Müller-Merbach, Operations Research..., a.a.O., S. 64ff.

Schwierigkeiten ergeben sich, wenn das Problem mehrere lokale Maxima aufweist, d.h. das System der gleich Null gesetzten partiellen ersten Ableitungen mehrere Lösungen hat, die gleichzeitig die hinreichenden Bedingungen erfüllen. Liegt die optimale Lösung in einem Knick der Funktion[1] oder ist die Funktion nicht stetig, so ist die Differentialrechnung nicht zur Bestimmung des Optimums geeignet.

Auch, wenn das Problem die Einhaltung von Nichtnegativitätsbedingungen erfordert, wenn also negative Variablen-Niveaus unzulässig sind, kann die Methode der Optimumbestimmung mittels Differentialrechnung versagen. Die Einhaltung von Nichtnegativitätsbedingungen kann mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren nicht sichergestellt werden.

Ferner kann in einem gegebenen Problem der Fall auftreten, daß das System der gleich Null gesetzten ersten Ableitungen nach allen Variablen teils über- und teils unterbestimmt ist. Wenn nämlich in der Zielfunktion einige Variablen nur in erster Potenz auftreten, so verschwinden diese bei der ersten Ableitung. Bezüglich dieser Variablen kann das System der durch Nullsetzen der ersten partiellen Ableitungen gebildeten Bestimmungsgleichungen - je nach der Gestalt des Systems der Nebenbedingungen - u.U. keine Bestimmungsgleichung enthalten. Da aber andererseits die Anzahl der Bestimmungsgleichungen gleich der Anzahl der Variablen ("echte" Variable, Schlupfvariable und Lagrange-Multiplikatoren) ist, kann das System bezüglich der beim Differenzieren verschwundenen Variablen überbestimmt sein.[2]

---

1 Siehe z.B. R.G.D. Allen, Mathematik..., a.a.O., S. 192.

2 Vgl. hierzu auch H. Müller-Merbach, Operations Research..., a.a.O., S. 69f., wo dieser Sachverhalt durch Beispiele verdeutlicht wird.

(2) Lineare Programmierung

In linearen Programmen, d.h. in Problemen, in denen eine in allen Gliedern lineare Zielfunktion unter in allen Gliedern linearen Nebenbedingungen zu maximieren ist, ist das System der Bestimmungsgleichungen, das durch Nullsetzen der partiellen ersten Ableitungen zu gewinnen ist, regelmäßig unterbestimmt. Probleme dieser Art, die formal geschrieben werden können als

$$(1) \qquad f(y) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i \rightarrow \max!$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ij} x_i + x_j = C_j \qquad \text{für } j=1,\ldots,m$$

$$\left.\begin{matrix} x_i \\ x_j \end{matrix}\right\} \geq 0$$

wobei A, B, C Konstante sind, i die laufende Nummer der Variablen, j die laufende Nummer der Nebenbedingungen bezeichnen, x_i die "echten" Variablen und x_j "Schlupfvariable" darstellen, werden mit Methoden der linearen Programmierung gelöst.[1] Wohl kaum ein Gebiet der Unternehmens-

1 Zur linearen Programmierung kann nur ein kleiner Teil der existierenden Literatur genannt werden. An erster Stelle ist der "Erfinder" der linearen Programmierung (genauer der Erfinder der Simplex-Methode) zu nennen: G.B. Dantzig, Lineare Programmierung und Erweiterungen (ins Deutsche übertragen von Arno Jaeger, Titel der Originalausgabe: Linear Programming and Extensions, Princeton N.J. 1963), Band II von W. Krelle - H.P. Künzi et.al. (Hrsg.), Ökonometrie und Unternehmensforschung, Berlin-Heidelberg-New York 1966. Daneben seien beispielhaft genannt: H.C. Joksch, Lineares Programmieren, Band 4 von W.G. Hoffmann (Hrsg.), Schriften zur angewandten Unternehmensforschung, Tübingen 1962; S.I. Gass, Linear Programming, Methods and Applications, New York-Toronto-London 1958; G. Hadley, Linear Programming,

forschung hat so weite Verbreitung gefunden wie das der linearen Programmierung.

Hierbei sind zu unterscheiden die Transportmethoden und Methoden der allgemeinen linearen Programmierung. Als Beispiele der Transportmethoden seien genannt die Stepping-Stone-Methode[1], die Modi-Methode[2] und die Ungarische Methode[3], die ihrerseits wiederum mit verschiedenen Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung kombiniert werden können[4]. Diesen Verfahren sind Probleme zugänglich, bei denen es um paarweise Zuordnungen bzw. Verknüpfungen[5], im historischen Ausgangsfall z.B.

Reading (Mass.) - Palo Alto (Cal.) - London 1962; M.J. Beckmann, Lineare Planungsrechnung, Linear Programming, Ludwigshafen a.Rh. 1959; W. Krelle - H.P. Künzi, Lineare Programmierung, Zürich 1958; B. Kreko, Lehrbuch der linearen Optimierung, 4. Aufl., (Ost-)Berlin 1969; W.R. Smythe Jr. - L.A. Johnson, Introduction to Linear Programming with Applications, Englewood Cliffs (N.J.) 1966; D.U. Greenwald, Linear Programming. An Explanation of the Simplex Algorithm, New York (N.Y.) 1957; F.J. Fay, Lineare Algebra und Optimierung. Mathematische Grundlagen und Beispiele zur linearen Programmierung, Wiesbaden 1968; P. Vokuhl, Die Anwendung der linearen Programmierung in Industriebetrieben, Berlin 1965; S. Danø, Linear Programming in Industry. Theory and Applications. An Introduction, 3. Aufl., Wien - New York 1965; H. Eichenberger, Ökonomische Methoden in der linearen Planungsrechnung, Band 2 von E.P. Billeter (Hrsg.), Schriftenreihe des Instituts für Automation und Unternehmensforschung der Universität Freiburg (Schweiz), Hamburg - Berlin 1963; A. Vazsonyi, Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, Wien 1962, S. 103-182; H. Müller-Merbach, Operations Research ..., a.a.O., S. 87-172; H.M. Wagner, Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions, Englewood Cliffs (N.J.) 1969, S. 95-127.

1 Siehe z.B. G. Hadley, Linear Programming, a.a.O., S. 291 ff.

2 Siehe z.B. H.C. Joksch, Lineares Programmieren, a.a.O., S. 154 ff.

3 Siehe z.B. ebenda, S. 159 ff, insbesondere S. 162 ff.; B. Kreko, Lehrbuch der linearen Optimierung, a.a.O., S. 377-398.

4 Am bekanntesten dürfte die sogenannte Nordwest-

die Verknüpfung von Versand- und Empfangsorten zu transportierender homogener Güter, geht. Die spezielle Struktur dieser Probleme ermöglicht besonders einfache Lösungsverfahren[1]. Deshalb versucht man häufig, gegebene Probleme so umzuformen, daß die entstehenden Modelle die Struktur eines Transportproblems erhalten[2].

Ist die spezielle Struktur von Transportproblemen nicht gegeben, geht es also allgemein um die optimale Allokation von beschränkten Ressourcen auf bestimmte Empfangsgrößen (Variable), wobei Zielfunktion und Nebenbedingungen in allen Gliedern linear sind, so kann die Lösung mit verschiedenen Methoden der "allgemeinen" linearen Programmierung gefunden werden. Am bekanntesten ist die erstmals im Jahre 1947 von Dantzig vorgeschlagene Simplex-Methode[3]. Andere Verfahren sind die Duoplex-Methode[4], die Triplex-Methode[5], die Multiplex-Methode[6],

---

Ecken-Regel sein. Siehe z.B. W.R. Smythe - L.A. Johnson, Introduction to Linear Programming ..., a.a.O., S. 171 f.; eine bereits relativ gute Ausgangslösung (in einigen Fällen sogar bereits die optimale) kann mit Vogels Approximationsmethode bestimmt werden. Siehe z.B. G. Hadley, Linear Programming, a.a.O., S. 308 f. und die ebenda S. 323 angegebene Quelle; B. Krekó, Lehrbuch ..., a.a.O., S. 38 ff.

5 Ein Spezialfall, in dem die Variablen nur die Werte 0 und 1 mit den Bedeutungen "keine Zuordnung" bzw. "Zuordnung" annehmen können, ist das einfache Zuordnungsproblem. Siehe z.B. H.C. Joksch, Lineares Programmieren, a.a.O., S. 157 ff.

1 Vgl. z.B. G.B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, a.a.O., S. 353.

2 So kann z.B. das Problem der Produktions- und Lagerplanung bei saisonalen Absatzschwankungen approximativ in einer Formulierung als Transportproblem gelöst werden, indem die Produktionskapazitäten diskreter Teilperioden des Planungszeitraumes als Versand- und die Absatzmöglichkeiten der einzelnen Teilperioden als Empfangsorte interpretiert werden. Siehe z.B. E.H. Bowman, Production Scheduling ..., a.a.O.,; G.T. Bishop, On a Problem of Production Scheduling, a.a.O.; F. Hanssmann, Operations Research in Production and Inventory Control, a.a.O., S. 114.; C.C. Holt - F. Modigliani - J.F. Muth - H.A. Simon, Planning

die Methode der Leitvariablen[1], die Methode des logarithmischen Potentials[2], die Methode der vollständigen Beschreibung[3] u.a..

Das Lösungsprinzip der Methoden der linearen Programmierung[4] basiert auf dem Umstand, daß wegen der Linearität von Zielfunktion und Nebenbedingungen das Optimum nur am Rande des Lösungsraumes liegen kann und daß infolgedessen zur Bestimmung der optimalen Lösung nur die Basislösungen betrachtet zu werden brauchen; das sind alle diejenigen Lösungen, die das System der durch Schlupfvariable zu Gleichungen aufgefüllten Nebenbedingungen erfüllen, wobei so vielen Variablen das Niveau Null zugeordnet ist, wie Freiheitsgrade vorhanden sind. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist dabei gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Variablen und der Anzahl der unabhängigen Nebenbedingungen[5]. Das

---

Production, Inventories, and Work Force, Englewood Cliffs (N.J.) 1960, S. 392 ff.

3 Siehe z.B. die in Fußnote 1 zu S. 46 angegebene Literatur, insbesondere D.U. Greenwald, Linear Programming ..., a.a.O..

4 H.P. Künzi, Die Duoplex-Methode, Unternehmensforschung, Band 7, 1963, S. 103-116, insbesondere S. 113 ff.

5 H.P. Künzi - K. Kleibohm, Das Tripley-Verfahren, Unternehmensforschung, Band 12, 1968, S. 145-154.

6 Siehe z.B. H.C. Joksch, Lineares Programmieren, a.a.O., S. 145 f. und die dort angegebene Literatur.

1 Ebenda, S. 144 f. und die dort angegebene Literatur.

2 Ebenda, S. 146 f. und die dort angegebene Literatur.

3 W. Krelle - H.P. Künzi, Lineare Programmierung, a.a.O., S. 90 f.

4 Eine Ausnahme stellen bezüglich der Funktionsweise die Multiplex-Methode und die Methode des logarithmischen Potentials dar. Das Lösungsprinzip -Bewegung durch das Innere des Lösungsraumes nach Maßgabe von Gradienten - ist auch bei bestimmten nichtlinearen Problemen anwendbar.

5 Vgl. hierzu "Theorem 1" von R. Dorfman - P.A. Samuelson - R.M. Solon, Linear Programming and Economic Analysis, New York - Toronto - London 1958, S.164:

lineare Programm wird also optimiert, indem nach einem bestimmten Schema sukzessive verschiedene Basislösungen (Ecken des Lösungsraumes), d.h. Niveaukombinationen von n+m Variablen mit n-m Nullen[1], die das Gleichungssystem der m Nebenbedingungen erfüllen, gebildet werden, bis die optimale (Basis-) Lösung gefunden ist. Diese ist mit Hilfe der Kuhn-Tucker-Kriterien (allgemein notwendige, unter den Voraussetzungen der linearen Programmierung aber auch hinreichende Optimalitätsbedingungen)[2] erkennbar.

Anwendungsvoraussetzungen für die Verfahren der linearen Programmierung sind Linearität von Zielfunktion [3] und Nebenbedingungen sowie die kontinuierliche Veränderbarkeit aller Variablen. Obwohl die lineare Programmierung (mit Ausnahme der Multiplex-Methode und der Methode des logarithmischen Potentials) keinen Gebrauch davon macht, beinhalten die Voraussetzungen der Linearität und Stetigkeit, das sei der Vollständigkeit halber am Rande bemerkt, die Differenzierbarkeit von Ziel-

---

"If in any problem there is any feasible program, then there is an optimal feasible program which involves no more than k activities at nonzero levels, where k is the number of restrictions to which the solution must conform."

1 n ist die Anzahl der "echten" Variablen, m die der Nebenbedingungen.

2 Für eine eingehendere Behandlung der Kuhn-Tucker-Bedingungen ist hier nicht der Platz. Es sei daher hierzu auf die Literatur verwiesen, z.B. H.O. Zieschang, Das Opportunitätskostenprinzip, a.a.O., S. 34-43; M.J. Beckmann, Lineare Planungsrechnung, a.a.O., S. 173-178; W.S. Dorn, Non-linear Programming - A Survey, Management Science, Band 9, 1962/63, S. 171-208, hier S. 172-175.

3 Siehe Fußnote 4 zu Seite 49.

funktion und Nebenbedingungen[1]. Dies ist insofern von Bedeutung, als zwischen der linearen Programmierung und der Lagrange-Multiplikator-Methode ein Zusammenhang besteht: Er liegt in der inhaltlich gleichen Bedeutung der Lagrange-Multiplikatoren einerseits und den Dualvariablen (Schattenpreise, Opportunitätskosten)[2] andererseits sowie in der Tatsache, daß die Kuhn-Tucker-Bedingungen aus einem Lagrange-Ansatz abgeleitet werden[3].

Die Voraussetzung der kontinuierlichen Veränderbarkeit der Variablen kann mit Hilfe von Zusatzverfahren umgangen werden. Nebenbedingungen dergestalt, daß von einigen oder allen Variablen nur ganzzahlige Niveaus zulässig sind, können mit Methoden der ganzzahligen Programmierung berücksichtigt werden[4]. Am bekanntesten dürfte hierbei das Verfahren Gomory's[5] sein. Es kann zwar bewie-

---

1 Zwar kann man auch Probleme mit der linearen Programmierung behandeln, in denen die Zielfunktion geknickt und nur abschnittsweise stetig linear ist, doch bedürfen sie dazu einer Umformung: Die Variablen des gegebenen Problems müssen im Modell in mehrere Variable aufgespalten und deren Zulässigkeitsbereiche durch zusätzliche Nebenbedingungen begrenzt werden, so daß im Modell die oben genannte Anwendungsvoraussetzung der kontinuierlichen Linearität und Differenzierbarkeit über den gesamten Lösungsraum erfüllt ist.

2 Vgl. H.O. Zieschang, Das Opportunitätskostenprinzip, a.a.O., S. 34-43.

3 Siehe Fußnote 2 zu Seite 50.

4 Vgl. z.B. G.B. Dantzig, Lineare Programmierung ..., a.a.O., S. 583-624; H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O., S. 445-466; B. Krekó, Lehrbuch der linearen Optimierung, a.a.O., S. 238-243; H.C. Joksch, Lineares Programmieren, a.a.O., S. 190-199.

5 R.E. Gomory, An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, IBM Mathematics Research Project, Technical Report No. 1, Princeton (N.J.) 1958; G.B. Dantzig, Lineare Programmierung ..., a.a.O., S. 590-607; M. Terebesi, Bemerkungen zum Verfahren von Gomory zur Bestimmung ganzzahliger Lösungen von linearen Programmen, Unternehmensforschung, Band 5, 1961, S. 197-215; H. Müller-Merbach, Operations Research ..., a.a.O., S. 353 bis 361.

sen werden, daß mit diesem Verfahren in endlich vielen Iterationen eine ganzzahlige optimale Lösung gewonnen werden kann, in der Praxis indessen versagt das Verfahren häufig[1].

(3) Nichtlineare Programmierung

Bei den in diesem Abschnitt zu besprechenden Verfahren ist es besonders schwierig, eine Übersicht zu geben, und noch schwieriger, sie eindeutig zu klassifizieren. Daher mögen hier (ohne Vollständigkeit zu beanspruchen) nur verschiedene Grundgedanken angedeutet werden. Beispiele von konkreten Verfahren, die dazu im folgenden genannt werden, verwenden z.T. mehrere dieser Grundgedanken, weshalb ihre jeweilige Einordnung keinen Ausschließlichkeitscharakter haben kann.

Als bedeutendste Verfahren der nichtlinearen Programmierung sind zu nennen Verfahren, die mit mehr oder weniger geringfügigen Modifikationen der Simplex-Methode auskommen, Gradienten-Verfahren und Schnittebenen-Verfahren. Unimodale Suchverfahren wie Fibonacci-Suche oder Bolzano-Suche[2] passen nicht ganz in diesen Rahmen. Sie nehmen bezüglich ihrer Einordnung eine Sonderstellung ein[3] und seien daher an dieser Stelle nur erwähnt.

1 H. Müller-Merbach, Operations Research ..., a.a.O., S. 360; M. Terebesi, Bemerkungen zum Verfahren von Gomory ..., a.a.O., S. 205; H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O., S. 448; M.L. Bolinski, Integer Programming: Methods, Uses, Computation, Management Science, Serie A, Band 12, 1966, S. 253-313, hier S. 294. Zu einem Beispiel siehe D. Adam, Produktionsplanung bei Sortenfertigung. Ein Beitrag zur Theorie der Mehrproduktunternehmung, Diss. Hamburg 1965, S. 145-149.

2 Siehe z.B. W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 120-122; H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O., S. 524-528.

3 Vgl. das Gliederungsschema von S. 36 und die Erläuterungen dazu auf S.37ffdieser Arbeit.

In die erstgenannte Gruppe gehören, um nur die wichtigsten und bekanntesten zu nennen, die Verfahren von Wolfe[1], Beale[2], Lemke[3], Barankin-Dorfman[4] und Frank-Wolfe[5]. Allen diesen Verfahren ist gemeinsam, daß das gegebene Problem in ein lineares Problem umgeformt wird und alsdann mit einer leicht modifizierten Simplex-Methode gelöst wird[6]. Sie sind anwendbar, wenn die Zielfunktion die Form

$$(2) \qquad f(y) = \sum_{i} \sum_{i'} C_{ii'} x_i x_{i'} + \sum_{i} D_i x_i$$

hat[7] und die Nebenbedingungen linear sind. y bezeichnet hierbei beliebige Lösungspunkte darstel-

1 Siehe W.S. Dorn, Non-linear Programming - A Survey, Management Science, Band 9, 1962/63, S. 171 bis 208, hier S. 183-188; R. Henn - H.P. Künzi, Einführung in die Unternehmensforschung II, Berlin-Heidelberg-New York 1968, S. 49-52; G. Zoutendijk, Methods of Feasible Directions. A Study in Linear and Non-linear Programming, Amsterdam-London-New York-Princeton 1960, S. 111; H.P. Künzi - W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S. 113-131; G.B. Dantzig, Lineare Programmierung ..., a.a.O., S. 534-542 sowie die dort angegebene Literatur.

2 Siehe W.S. Dorn, Non-linear Programming, a.a.O., S. 188-194; R. Henn - H.P. Künzi, Einführung ..., a.a.O., S. 45-49; H.P. Künzi - W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 93-113 sowie die dort angegebene Literatur.

3 Siehe W.S. Dorn, Non-linear Programming, a.a.O., S. 195 und die dort angegebene Literatur.

4 Siehe H.P. Künzi - W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 131-139.

5 Ebenda, S. 139-145.

6 Vgl. H. Müller-Merbach, Operations Research, a.a.O., S. 177.

7 Bei entsprechenden Vorzeichen der Koeffizienten $C_{ii'}$ und D_i ist eine solche Funktion konkav bzw. konvex. Der Lösungsraum ist bei linearen Nebenbedingungen konvex. Da ferner der höchste vorkommende Exponent einer Variablen in der Zielfunktion 2 ist, spricht man hier auch von quadratischer (konvexer) Programmierung.

lende Vektoren mit n Variablen-Niveaus x darstellenden Komponenten. i und i' sind Variablen-Indizes, wobei i gleich oder ungleich i' sein kann. C und D sind Konstante des Problems. Die Zielfunktion kann also additiv verknüpfte Glieder mit je einer Variablen in erster oder zweiter Potenz und Glieder mit je zwei Variablen in multiplikativer Verknüpfung enthalten.

Von den Gradienten-Methoden seien hier genannt eine Methode zulässiger Richtungen von Zoutendijk[1], die Gradienten-Projektions-Methode von J.B. Rosen[2], die Multiplex-Methode von R. Frisch[3]. Ihre Funktionsweise ist grundsätzlich wie folgt zu kennzeichnen. Im zulässigen Lösungsraum wird von einem beliebig gewählten Ausgangspunkt z^1 ausgehend sukzessive nach "besseren" Punkten z^k $(k=2,3,4,\ldots,k^+)$ gesucht, wobei jeweils der neue Punkt z^{k+1} durch Angabe von Richtung d und Schrittweite τ aus dem Vorgängerpunkt z^k bestimmt wird:

$$(3) \qquad z^{k+1} = z^k + \tau^k \cdot d^k \ .$$

Die einzelnen Verfahren unterscheiden sich durch verschiedene (um einen Ausdruck Zoutendijks zu benutzen) "Normierungen" der Bestimmung von Richtung d und/oder Schrittweite τ.

1 Siehe W.S. Dorn, Non-linear Programming, a.a.O., S. 198 f.; H.P. Künzi - W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 181-189. In der Literatur wird die Methode von Zoutendijk auch schlechthin "Methode zulässiger Richtungen" genannt, obwohl Zoutendijk diesen Ausdruck als Oberbegriff für alle in ähnlicher Weise arbeitenden Verfahren verwendet, wobei sich die einzelnen Algorithmen durch verschiedene "Normierungen" des Suchprozesses unterscheiden. Vgl. G. Zoutendijk, Methods of Feasible Directions, a.a.O.

2 Siehe z.B. H.P. Künzi - W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 152-170.

3 Siehe z.B. ebenda, S. 170-181. Die Multiplex-Methode wird zuweilen auch unter den Methoden der linearen Programmierung aufgeführt (z.B. bei H.C. Joksch, Lineares Programmieren, a.a.O., S. 145 f.). In der Tat ist sie, wie auch andere Verfahren der quadratischen Programmierung, auch zur Lösung linearer Programmierungsprobleme geeignet.

Zur Bestimmung der Richtung benutzt man wesentlich die folgende Eigenschaft des Gradienten (des Vektors der partiellen ersten Ableitungen einer Funktion f mit den konkreten Zahlen des jeweiligen Punktes): "Der Gradient weist, wenn er nicht Null ist, in eine solche Richtung, daß eine kleine Bewegung in jener Richtung f vergrößert."[1] Der Gradient $\nabla f(y)$ zeigt also diejenige Richtung, ausgehend von einem beliebigen Punkt y an, in der der Wert der Zielfunktion f am stärksten ansteigt.

Wären keine Nebenbedingungen zu berücksichtigen, so könnte man unmittelbar den Gradienten als Richtung im k-ten Schritt, $d^k = \nabla f(z^k)$, wählen. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß man mit einem Schritt in dieser Richtung den zulässigen Lösungsraum verlassen würde. Um dies zu vermeiden, zieht man bei der Bestimmung der Richtung d^k neben dem Gradienten der Zielfunktion auch den (die) Gradienten der dem jeweiligen Punkt z^k nächstliegenden Restriktion(en) heran - daher auch die Bezeichnung "Verfahren zulässiger Richtungen".

Die Schrittweite τ^k kann infinitesimal klein sein[2] - man folgt kontinuierlich der Gradientenrichtung[3]. Bedeutender aber dürften die Gradientenverfahren mit endlicher Schrittweite sein. (Die oben genannten Verfahren gehören in diese Gruppe.) Hierbei besteht der Grundgedanke darin, daß man den Ausdruck

---

1 ".. the gradient, if it is not zero, points in a direction such that a small movement in that direction will increase f." W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 24.

2 In diesem Fall geht die Anzahl der Schritte $k \to \infty$.

3 Vgl. H.P. Künzi - W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 149-151.

$$(4) \qquad f(y)_L = f(z^k) + \nabla f(z^k)^T \cdot (y - z^k)$$

als lineare Approximation der Zielfunktion auffassen kann[1], daß man also auch bei Schritten $z^k \rightarrow z^{k+1}$ mit

$$(5) \qquad z^{k+1} = z^k + \nabla f(z^k) \cdot \tau$$

mit endlichem τ eine Erhöhung des Zielfunktionswertes erwarten kann[2]. Die endliche Schrittweite τ^k wird nun i.d.R. in der Weise bestimmt, daß bei ihrer Anwendung auf die Richtung d^k der beste der in dieser Richtung überhaupt erreichbaren Punkte erreicht wird. Es handelt sich dabei in jedem Schritt um ein eindimensionales Problem, dessen Maximum unter den unten zu nennenden Anwendungsvoraussetzungen dieser Verfahren leicht mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmt oder als Randmaximum identifiziert werden kann[3].

Je nach der Art der "Normierung" des Suchprozesses konvergieren diese Verfahren in endlich oder unendlich vielen Schritten auf die optimale Lösung des Problems[4].

---

1 Vgl. W.I. Zangwill, Nonliniear Programming, a.a.O., S. 109.

2 Dieser Grundgedanke ist schon recht alt. Er wurde bereits im Jahre 1847 von Cauchy vorgeschlagen. A.L. Cauchy, Méthode Générale pour la Résolution des Systèmes d'Equations Simultanées, Comptes Rendus, Académie Science, Paris, Band XXV, 1847, S. 536-538, zitiert nach W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 335.

3 Ergibt die Optimierung der Schrittweite mit der Differentielrechnung eine Schrittweite, mit der der zulässige Lösungsraum verlassen würde, so wählt man die größte zulässige Schrittweite.

4 Ersteres gilt bei den Verfahren mit endlicher, letzteres bei den mit infinitesimal kleiner Schrittweite.

Das bekannteste Schnittebenen-Verfahren dürfte das von Kelley sein[1]. Ferner seien als zu dieser Gruppe gehörend erwähnt die Verfahren von Veinott[2] und Kleibohm[3]. Das Prinzip dieser Verfahren sei wie folgt angedeutet: Von einem zunächst unbegrenzten n-dimensionalen Raum (wobei n die Anzahl der Variablen des Problems bezeichnet) werden durch (n-1)-dimensionale Hyperebenen ("Schnittebenen") sukzessive Teile abgeschnitten[4], die entweder unzulässig sind oder das Optimum nicht enthalten können, bis der verbleibende Raum die optimale zulässige Lösung darstellt. Solche Verfahren konvergieren in unendlich vielen Schritten.

Gemeinsame Voraussetzung all dieser Verfahren für die Konvergenz gegen die beste aller zulässigen Lösungen ist, daß es sich um sogenannte unimodale (d.h. eingipfelige) Probleme handelt, denn nur unter dieser Voraussetzung sind die Kuhn-Tucker-Kriterien notwendig und hinreichend für die Identi-

---

1 Siehe z.B. W.S. Dorn, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 197.

2 A.F. Veinott, The Supporting Hyperplane Method for Unimodal Programming, Operations Research, Band 15, 1967, S. 147-152.

3 K. Kleibohm, Ein Verfahren zur approximativen Lösung von konvexen Programmen, Diss. Zürich 1966 (zitiert nach R. Pfranger, Ein heuristisches Verfahren zur globalen Optimierung, Unternehmensforschung, Band 14, 1970, S. 27-50, hier S. 50).

4 Da für die Auswahl der Schnittebenen Gradienten von Nebenbedingungen und/oder Zielfunktion benutzt werden, könnte man die Schnittebenen-Verfahren ebenfalls zu den Gradientenmethoden zählen. Da aber die Vorgehensweise bei den Gradientenmethoden (zulässiger Richtungen und den Schnittebenen-Methoden) recht unterschiedlich ist, hielt es der Verfasser für zweckmäßig, letztere in eine besondere Gruppe einzuordnen.

fikation der optimalen Lösung[1]. Diese Voraussetzung ist dann erfüllt, wenn der Lösungsraum konvex und die Zielfunktion im zulässigen Bereich bei Minimierungsproblemen konvex bzw. bei Maximierungsproblemen konkav ist. Der Lösungsraum ist konvex, wenn eine lineare Verbindung zweier beliebiger zulässiger Punkte keinen Punkt enthält, der außerhalb des Lösungsraumes liegt. Die Voraussetzung der Konvexität[2] einer differenzierbaren Zielfunktion $f(y) = f(x_1,\ldots,x_n)$ ist erfüllt, wenn für jede Variable x_i bei beliebig gegebener Niveaukombination der übrigen Variablen $(x_{i'}/i' \neq i)$ ein und nur ein Niveau existiert, bei dem die erste partielle Ableitung $\frac{\partial f(y)}{\partial x_i} = 0$ ist und wenn bei diesem Niveau die zweite partielle Ableitung $\frac{\partial^2 f(y)}{\partial x_i^2} > 0$ ist, oder wenn im Falle, daß kein Niveau existiert, bei dem $\frac{\partial f(y)}{\partial x_i} = 0$ ist, im gesamten zulässigen Bereich bei beliebig gegebener Niveaukombination der übrigen Variablen $\frac{\partial f(y)}{\partial x_i} < 0$ ist. Die Voraussetzung der Konkavität ist erfüllt, wenn die vorstehenden Bedingungen für $-f(y)$ gelten.

Weiterhin sind diese Verfahren nur auf Probleme mit kontinuierlich veränderbaren Variablen und an allen Stellen (im Lösungsraum) differenzierbaren Funktionen (Zielfunktion und Nebenbedingungen) ausgerichtet.

Die in unendlich vielen Schritten konvergierenden Verfahren ermöglichen praktisch nur approximative Lösungen, allerdings mit beliebig genauem Approximationsgrad.

1 Vgl. z.B. H.C. Joksch, Lineares Programmieren, a.a.O., S. 173-178; W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 33, 43 f.

2 Genau genommen handelt es sich hierbei nur um Pseudo-Konvexität; strenge Konvexität ist hier nicht erforderlich. Zu Einzelheiten und alternativen Definitionen siehe z.B. W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 27-30, 33-36; R.G.D. Allen, Mathematik ..., a.a.O., S. 193 f.

Die Bedeutung der Kuhn-Tucker-Bedingungen[1] für die konvexe nichtlineare Programmierung[2] stellt übrigens eine Querverbindung von diesen Verfahren zur linearen Programmierung und weiter zur Lagrange-Multiplikator-Methode dar. Ferner besteht selbstverständlich eine unmittelbare Verbindung zwischen den Gradientenmethoden und der Differentialrechnung, ja man könnte hier sogar von Anwendungsfällen der Differentialrechnung sprechen.

(4) Zusammenfassung der Anwendungsvoraussetzungen

Mit den skizzierten Optimierungsverfahren können unternehmerische Entscheidungsprobleme nur gelöst werden, wenn sie in unimodalen Modellen erfaßt werden können. Die Zielfunktion muß linear oder konkav[3] sein. Der Lösungsraum muß konvex sein, was stets dann der Fall ist, wenn alle Nebenbedingungen linear sind. Das Problem muß ferner so formuliert sein, daß in dem Modell Zielfunktion und Nebenbedingungen stetig und an allen Stellen differenzierbar sind[4].

In Problemen, die mehrere lokale Extrema und/oder Sattelpunkte aufweisen, kann die beste aller zulässigen Lösungen durch Anwendung dieser Verfahren

---

1 Vgl. dazu die oben im einzelnen zitierte Literatur, insbesondere H.P. Künzi, W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 145-198.

2 Wegen der Voraussetzung der Unimodalität und, weil die genannten Verfahren häufig unter Bezugnahme auf Minimierungsprobleme beschrieben werden, hat sich für sie der - vielleicht etwas irreführende - Oberbegriff "konvexe Programmierung" eingebürgert.

3 Bei Minimierungsproblemen muß die Zielfunktion konvex sein.

4 Vgl. aber Fußnote 1 zu Seite 51.

nicht oder nur zufällig gefunden werden. Ausnahmen stellen lediglich Fälle mit einem sogenannten Plateau-Maximum[1] dar, d.h. Fälle, in denen verschiedene benachbarte Lösungen den höchsten erreichbaren Zielfunktionswert aufweisen. Ein solcher Fall tritt z.B. in linearen Programmen auf, wenn der maximale Zielfunktionswert $f^+(y)$ bei zwei oder mehreren Basislösungen und damit auch bei allen linearen Kombinationen dieser Basislösungen erreicht wird, d.h. wenn ein j existiert, so daß die j-te Nebenbedingung mit der Iso-Gewinnfunktion $f^+(y)$ zusammenfällt:

Nebenbedingungen, nach denen nur endlich viele diskrete Niveaus der Variablen zulässig sind (Ganzzahligkeitsbedingungen) bedeuten stets eine erhebliche Erschwerung der Lösung, i.d.R. machen sie gar die Anwendung dieser Verfahren unmöglich.

Wie stark die genannten Voraussetzungen den Anwendungsbereich der skizzierten Verfahren zur Lösung unternehmerischer Entscheidungsprobleme einengen können, sei im Abschnitt C dieser Arbeit gezeigt.

---

1 Zu dieser Bezeichnung siehe W. Frank, Mathematische Grundlagen der Optimierung. Variationsrechnung - dynamische Programmierung - Maximumprinzip, München-Wien 1969, S. 198.

d Sukzessive Optimierungsverfahren

(1) Allgemeine Kennzeichnung der sukzessiven Optimierungsverfahren

Unterstellt man, was für Entscheidungsprobleme der Unternehmungspraxis generell erfüllt sein dürfte, daß die Anzahl der zulässigen Lösungen des Problems endlich ist, so besteht prinzipiell die Möglichkeit, alle zulässigen Lösungen in einer Tabelle zusammenzustellen, für jede den Wert der Zielfunktion zu berechnen und diejenige Lösung herauszusuchen, die den höchsten Zielfunktionswert aufweist (Vollenumeration). Indessen kann die Anzahl der zulässigen Lösungen so groß sein, daß die Anwendung dieses Verfahrens, selbst unter Zuhilfenahme eines Computers einen so großen Zeitaufwand erfordert, daß die Daten bereits überholt sind, wenn das Ergebnis endlich vorliegt. Die Vollenumeration ist nur bei extrem kleinen (gemessen an der Anzahl der zulässigen Lösungen) Problemen ein praktikables Lösungsverfahren[1].

Das Prinzip der dynamischen Programmierung[2], die begrenzte Enumeration und Branch-and-Bound-Verfahren ermöglichen eine Abkürzung des Auszählungs-

---

1 Vgl. H. Müller-Merbach, Operations Research, a.a.O., S. 310 f.; derselbe, Optimale Reihenfolgen, Band XV von W. Krelle - H.P. Künzi et al. (Hrsg.), Ökonometrie und Unternehmensforschung, Berlin-Heidelberg-New York 1970, S. 25-27.

2 Je nach der Methode der Stufenoptimierungen ist die dynamische Programmierung neben der Anwendung als abgekürztes Enumerationsverfahren auch zur Lösung kontinuierlicher Probleme geeignet. Da es hier aber nur um das Prinzip der Problemaufspaltung und nicht um eine vollständige Beschreibung aller möglichen konkreten Ausgestaltungen geht, möge die Einordnung an dieser Stelle genügen. (Vgl. auch S.62f.dieser Arbeit.)

verfahrens. Für die beiden letzteren gilt dies allerdings nur mit Sicherheit, wenn günstige Umstände vorliegen, die nicht allgemeingültig beschrieben und daher in konkreten Problemen auch nicht ex ante verifiziert werden können.

Müller-Merbach charakterisiert diese Verfahren als Entscheidungsbaum-Verfahren mit paralleler, sequentieller und gemischt parallel-sequentieller Organisation[1]. Die Entscheidungsbaum-Interpretation scheint sich jedoch für die dynamische Programmierung und die begrenzte Enumeration unmittelbar nur bei den von Müller-Merbach behandelten Reihenfolgeproblemen anzubieten. Bei allgemeineren Problemen erscheint sie zur Erleichterung des Verständnisses wenig geeignet. Daher sei auf sie hier nicht näher eingegangen. Vielmehr seien die genannten Ansätze im folgenden unabhängig nebeneinander behandelt, wobei die Darstellung nur insoweit gegeben sei, als es zur Diskussion der Anwendungsmöglichkeiten erforderlich erscheint.

Gemeinsamkeiten dieser Verfahren, im Unterschied zu den im vorausgegangenen Abschnitt behandelten Simultanverfahren, bestehen in zweierlei Hinsicht. Wurde dort die optimale Lösung eines Problems ermittelt, indem iterativ vollständige Niveaukombinationen aller Variablen gebildet wurden, so wird hier versucht, von vornherein die optimale Lösung schrittweise aufzubauen, wobei die einzelnen Variablen nacheinander explizit erfaßt werden. Zum anderen werden, im Gegensatz zu den oben behandelten bis ins einzelne ausgebauten Algorithmen, die sukzessiven Optimierungsverfahren hier nur als Grund-

1 H. Müller-Merbach, Optimale Reihenfolgen, a.a.O., S. 28.

strukturen der Problembehandlung aufgefaßt, die erst durch konkrete Operationsanweisungen zu vollständig in sich geschlossenen Algorithmen aufzufüllen sind. Das Prinzip der Branch-and-Bound-Methoden ist durch konkrete Verfahren zur Berechnung der "Bounds" und Regeln für das "Branching" aufzufüllen; eine Methode der dynamischen Programmierung ist erst dann vollständig beschrieben, wenn die Methode der Stufenoptimierungen spezifiziert ist.

(2) Das Prinzip der dynamischen Programmierung

Das Prinzip der dynamischen Programmierung[1] besteht in folgendem: Ein gegebenes Problem mit n Variablen wird in n Teilprobleme mit jeweils einer "Entscheidungsvariablen" aufgelöst, die untereinander durch "Zustandsvariable" verbunden sind. Aus den sukzessive gewonnenen Lösungen dieser Teilprobleme wird rekursiv (d.h. durch Rückschluß von der Lösung des letzten Teilproblems auf das vorletzte, von diesem auf das drittletzte usw.) die Lösung des gegebenen Gesamtproblems abgeleitet.

1 Zur ausführlichen Orientierung über die dynamische Programmierung sei hier auf die Literatur verwiesen. Dabei sind in erster Linie die Originalwerke von Bellman und Dreyfus zu nennen: R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton (N.J.) 1957; R. Bellman - St.E. Dreyfus, Applied Dynamic Programming, Princeton (N.J.) 1962; St.E. Dreyfus, Dynamic Programming and the Calculus of Variations, New York (N.Y.) 1965. Ferner seien genannt: K. Neumann, Dynamische Optimierung, Theorie und Anwendungen, Mannheim-Wien-Zürich 1969; G. Hadley, Nichtlineare und dynamische Programmierung, in deutscher Sprache hrsg. von H.P. Künzi, Würzburg-Wien 1969, S. 422-506; K. Elsner, Mehrstufige Produktionstheorie und dynamisches Programmieren, Meisenheim am Glan 1964, S. 50-96; R. Henn - H.P. Künzi, Einführung ..., a.a.O., S. 56-69; R.A. Howard, Dynamic Programming, Management Science, Serie A, Band 12, 1966, S. 317-348; derselbe, Dynamic Programming and Markov Processes, Cambridge (Mass.)-New York (N.Y.)-London 1960; M.J. Beckmann, Dynamic Programming of Economic Decisions, Band 9 von W. Krelle - H.P. Künzi et al. (Hrsg.), Ökonometrie und Unternehmensforschung,

Die Funktionsweise kann am einfachsten anhand eines Maschinenbelegungsproblems veranschaulicht werden[1]. Gegeben sei das Problem, eine gegebene Erzeugnismenge auf vier funktionsgleiche aber qualitativ verschiedene Produktionsaggregate in optimaler Weise zu verteilen. Nach dem Prinzip der dynamischen Programmierung wird dieses Problem wie folgt gelöst:

1. Stufe: Es wird die jeweils optimale Kombination von Ausbringungsmengen des ersten und zweiten Aggregates für alternative Gesamt-Ausbringungsmengen dieser beiden Aggregate bestimmt. Damit scheiden - entsprechend dem Bellman'schen

---

Berlin-Heidelberg-New York 1968; E. Ferschl, Grundzüge des Dynamic Programming, Unternehmensforschung, Band 3, 1959, S. 70-80; L. Pack, Die Elastizität der Kosten ..., a.a.O., S. 281 ff. und die Berechnungstabellen zu Zahlenbeispielen S. 288, 308, 321, 348, 350; H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 206 ff.; A. Fletcher - G. Clarke, Mathematische Hilfsmittel der Unternehmensführung, ins Deutsche übertragen von L. Pack, München 1966, S. 198-220; J.S. Wentzel, Elemente der dynamischen Programmierung, aus dem Russischen übersetzt von R. Herschel, München-Wien 1966; H.P. Künzi - O. Müller - E. Nievergelt, Einführungskurs in die dynamische Programmierung, Band 6 von M. Beckmann - H.P. Künzi (Hrsg.), Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Berlin-Heidelberg-New York 1968.

1 Zu der hier gegebenen Darstellungsweise vgl. insbesondere: H.P. Künzi - O. Müller - E. Nievergelt, Einführungskurs ..., a.a.O., S. 96 ff.; L. Pack, Die Elastizität der Kosten, a.a.O., S. 281 ff.

Optimalitätsprinzip[1] - für die endgültige Lösung alle nicht-optimalen Verteilungen auf die beiden ersten Aggregate aus. Je nachdem, welche Gesamtausbringung nach der Lösung der letzten Stufe und rekursiver Festlegung der Ausbringungsmengen des vierten und dritten Aggregates auf die ersten beiden Aggregate entfällt, liegen damit die optimalen Ausbringungsmengen der ersten beiden Aggregate fest.

2. Stufe: Für alternative Ausbringungsmengen der ersten drei Aggregate wird die jeweils optimale Kombination der beiden Größen "Ausbringung der ersten beiden Aggregate" und "Ausbringung des dritten Aggregates" bestimmt, wobei hinter der Größe "Ausbringung der ersten beiden Aggregate" die jeweils optimale Niveaukombination der ersten Stufe steht.

3. Stufe: Für die gegebene Gesamtausbringung werden alle Niveaukombinationen "Ausbringung der

---

1 Das Optimalitätsprinzip lautet: "An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision". R. Bellman, Dynamic Programming, a.a.O., S. 83; übersetzt: "Eine optimale Politik hat die Eigenschaft, daß wie auch immer der Ausgangszustand und die Anfangsentscheidung sein mögen, die verbleibenden Entscheidungen im Hinblick auf den aus der ersten Entscheidung resultierenden Zustand eine optimale Politik ergeben müssen". A. Fletcher - G. Clarke, Mathematische Hilfsmittel ..., a.a.O., S. 198; oder einfacher und verständlicher ausgedrückt: "Jede Unterpolitik einer optimalen Politik ist optimal". H.P. Künzi - O. Müller - E. Nievergelt, Einführungskurs ..., a.a.O., S. 2; zur Erläuterung siehe auch J.S. Wentzel, Elemente der dynamischen Programmierung, a.a.O., S. 14 f.

ersten drei Aggregate mit optimaler interner Verteilung" und "Ausbringung des vierten Aggregates" gebildet und die optimale ausgesucht.

Aus den Lösungen der drei Stufenprobleme werden alsdann die optimalen Ausbringungsmengen der einzelnen Aggregate wie folgt "rekursiv" bestimmt. Das Optimum der dritten Stufe gibt die optimale Ausbringungsmenge des vierten Aggregates und die demnach im optimalen Programm auf die drei ersten Aggregate entfallende Ausbringungsmenge an. Letztere wird auf die Ausbringung des dritten und die der ersten beiden Aggregate nach Maßgabe der Ergebnisse der zweiten Stufe verteilt. In entsprechender Weise werden aus den Ergebnissen der ersten Stufe die optimale Ausbringung des zweiten und die demnach auf das erste Aggregat entfallende Menge abgelesen.

Voraussetzung der dynamischen Programmierung ist die Separabilität[1] der Zielfunktion $f(y) = f(x_1,\ldots,x_n)$[2]. Über die Gestalt der Teilfunktionen

---

1 Eine Funktion $f(y) = f(x_1,\ldots,x_n)$ ist stets dann separabel, wenn sie als Summe von n Funktionen jeweils einer Variablen $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ geschrieben werden kann. Dies kann auch bei Funktionen mit multiplikativer Verknüpfung der einzelnen Glieder der Fall sein. Z.B. kann eine Funktion $f(y) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ in der o.a. additiv-verknüpften Form geschrieben werden als $f'(y) = \sum_{i=1}^{n} \log f_i(x_i)$. Vgl. G. Hadley, Nichtlineare und dynamische Programmierung, a.a.O., S. 17.

2 Vgl. z.B. G. Hadley, Nichtlineare und dynamische Programmierung, a.a.O., S. 423; R. Henn - H.P. Künzi, Einführung ..., a.a.O., S. 57, 61, 67; A. Vazsonyi, Die Planungsrechnung ..., a.a.O., S. 204,212,232; G.L. Nemhauser, Einführung in die Praxis der dynamischen Programmierung, München-Wien 1969, S. 61 ff.; K. Elsner, Mehrstufige Produktionstheorie ..., a.a.O., S. 56; H.P. Künzi - O. Müller - E. Nievergelt, Einführungskurs ..., a.a.O., S. 29.

$f_i(x_i)$, in die die Zielfunktion auflösbar sein muß, ist unmittelbar keine Voraussetzung erforderlich[1].

Ferner darf die Anzahl der Nebenbedingungen nicht zu groß sein, denn für jede Nebenbedingung, die sich auf mehrere Variable des gegebenen Problems bezieht, muß eine Zustandsvariable[2] definiert werden; bei größerer Anzahl von Zustandsvariablen aber scheitert die Anwendung der dynamischen Programmierung[3]. "Pro Restriktion muß eine Zustandsvariable eingeführt werden ..."[4]. "Praktisch sind nur Probleme bis ungefähr 4 Restriktionen mit vertretbarem Aufwand mit Hilfe der dynamischen Programmierung lösbar ..."[5].

Im Übrigen ist das Prinzip der dynamischen Programmierung noch durch konkrete Optimierungsverfahren für die Stufenoptimierungen auszufüllen. Das kann in einzelnen Fällen die Voll-Enumeration, in anderen eine Anwendung der Differentialrechnung sein;

---

1 Die Stufenoptimierungen können aber an spezielle Voraussetzungen gebunden sein, s.u.

2 In dem obigen Beispiel stellt die Zustandsvariable cum grano salis die mit den auf der jeweils gegenwärtigen und den vorausgegangenen Stufen erfaßten Aggregaten erstellte Gesamtausbringung dar. Ihr zulässiger Variationsbereich liegt maximal zwischen Null und der geforderten Gesamtausbringung aller Aggregate.

3 Vgl. G. Hadley, Nichtlineare und dynamische Programmierung, a.a.O., S. 507 und 519; A. Vazsonyi, Die Planungsrechnung ..., a.a.O., S. 232. Der Grund liegt in der "Parallelorganisation" bei der sukzessiven Konkretisierung (Bestimmung alternativer Suboptima in jeder Stufe), die einen hohen Speicherbedarf mit sich bringt. Vgl. z.B. H. Müller-Merbach, Operations Research, a.a.O., S. 315 f.

4 H.P. Künzi - O. Müller - E. Nievergelt, Einführungskurs ..., a.a.O., S. 96.

5 Ebenda.

in Fällen mit mehreren (auf mehr als eine Variable bezogenen) Nebenbedingungen kann jede Stufenoptimierung für sich wieder ein lineares oder nichtlineares Programmierungsproblem sein, so daß die verschiedensten der weiter oben skizzierten Simultan-Optimierungsverfahren für die Stufenoptimierungen im Rahmen der dynamischen Programmierung in Betracht kommen. Die für die Stufenoptimierungen verfügbaren Verfahren engen mit deren Anwendungsvoraussetzungen den effektiven Anwendungsbereich der dynamischen Programmierung weiter ein, so daß Fälle denkbar sind, in denen die dynamische Programmierung nur deshalb nicht anwendbar ist, weil kein geeignetes Verfahren für die Stufenoptimierungen existiert[1].

(3) Das Prinzip der Branch-and-Bound-Methoden

(a) Verwendung von Bounds als Auswahlkriterien

Wenn im folgenden auf die Anwendung von Branch-and-Bound-Methoden[2] eingegangen werden soll, so erscheint es fast selbstverständlich, daß lediglich auf gewisse gemeinsame Grundzüge und nicht auf einen speziellen Algorithmus Bezug genommen wird.

---

1 Ferner: "Die digitale Arbeitsweise des Computers bedingt eine Diskretisierung des Problems, was auch eine Bedingung für die Lösbarkeit desselben mit dynamischer Programmierung ist." H.P. Künzi - O. Müller - E. Nievergelt, Einführungskurs ..., a.a.O., S. 93.

2 Zur Einführung in die Grundzüge der Branch-and-Bound-Methoden siehe N. Agin, Optimum Seeking with Branch and Bound, Management Science, Serie B, Band 13, 1967, S. 176-185; M. Beckmann - H.P. Künzi (Hrsg.), Einführung in die Methode Branch and Bound, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Nr. 4, Berlin-Heidelberg-New York 1968.

Denn "jedes einzelne Problem erfordert seine eigene Methodik für die Berechnung der unteren Schranken und die Bestimmung guter Suchregeln für die Verzweigung und Auswahl von Zwischenknoten"[1].

In der Literatur wird nun behauptet, "Branch and Bound" sei ein allgemein anwendbarer Ansatz zur Optimumsuche[2]. In der Tat will dies auf den ersten Blick so scheinen, wenn man die Grundoperation, das "Branching" betrachtet:

Von der Menge aller Niveaukombinationen der einzeln beschränkten Variablen werden sukzessive disjunkte Teilmengen[3] abgespalten. In der ersten Branching-Stufe wird z.B. die Menge aller Niveaukombinationen aufgespalten in die Mengen derjenigen Niveaukombinationen, in denen die erste der in beliebiger Reihenfolge durchnumerierten Variablen jeweils ein bestimmtes Niveau hat[4]. Durch weitere Verzweigung nach alternativen Niveaus der übrigen Variablen läßt sich ein vollständiger "Lösungsbaum" konstruieren. Abb. 1 zeigt den vollständigen Lösungsbaum für das Beispiel eines Problems mit drei Variablen, die jeweils nur die Niveaus 0 und 1 annehmen können.

---

1 "Each individual problem requires its own methodology for computing lower bounds and the determination of good heuristics for branching and choosing intermediate nodes." N. Agin, Optimum Seeking with Branch and Bound, a.a.O., S. 184.

2 Siehe z.B. N. Agin, Optimum Seeking ..., a.a.O., S. 176.

3 Zwei Mengen A und B sind disjunkt, wenn sie kein gemeinsames Element y aufweisen, d.h. wenn kein Element y existiert, für das sowohl $y \in A$ als auch $y \in B$ gilt.

4 Es gibt auch andere Aufspaltungsprinzipien. Vgl. Fußnote 1 zu Seite 69. Als Beispiel siehe die bei H. Müller-Merbach skizzierte Behandlung des Traveling Salesman Problems mit Branch and Bound. H. Müller-Merbach, Optimale Reihenfolgen, a.a.O., S. 96-102.

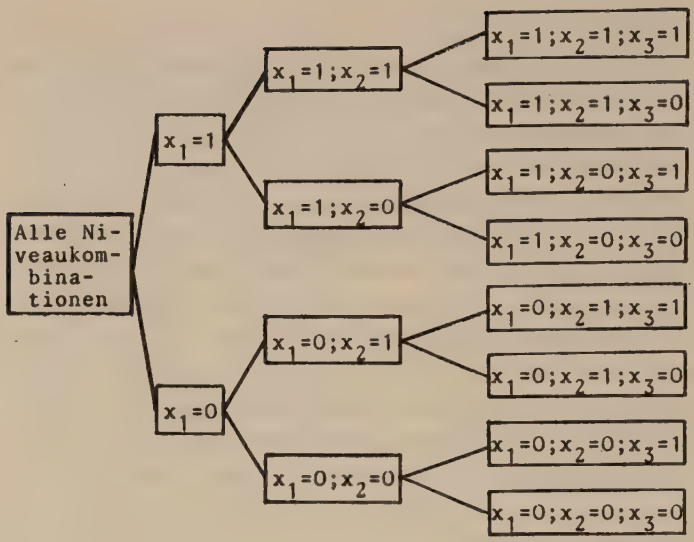


Abbildung 1

Zwischenknoten stellen also jeweils Mengen mehrerer Niveaukombinationen oder teilweise konkretisierte Niveaukombinationen dar. An der Spitze jedes Astes steht eine einelementige Teilmenge, also eine vollständig konkretisierte Niveaukombination.

Damit aus einer solchen Aufspaltung des Entscheidungsfeldes Nutzen gezogen werden kann, in dem Sinne, daß eine vollständige Enumeration vermieden werden kann, sind geeignete "Bounds" zu bestimmen, die anzeigen sollen, in welchem "Ast" des "Lösungsbaumes" die optimale Lösung des anstehenden Problems am ehesten vermutet werden kann. Unter günstigen Umständen, die nicht in allgemeinbegrifflicher Weise beschrieben werden können und deren Vorliegen in einem konkreten Problem daher auch nicht ex ante verifiziert werden kann, erübrigen die "Bounds" die Weiterverfolgung einiger Äste des Lösungsbaumes (Teilmengen,

die die optimale zulässige Lösung des Problems nicht enthalten können) bis zu ihrer Spitze, die eine einzige Niveaukombination darstellt.

Und zwar kennt man "lower bounds" (untere Schranken) und "upper bounds" (obere Schranken). Erstere geben einen Wert der Zielfunktion an, den diese mindestens behält, wenn man den betreffenden Ast in allen weiteren Verzweigungen bis zur Spitze weiterverfolgt. D.h. der nächste Knoten bezeichnet die Menge aller Niveaukombinationen, die keinen geringeren Zielfunktionswert aufweisen als der "lower bound" angibt, d.i. der Wert, der bei bestimmten Niveaus der festgelegten Variablen mit Sicherheit nicht unterschritten wird, gleichgültig, welche Niveaus den übrigen Variablen zugeordnet werden. Umgekehrt geben die "upper bounds" einen Wert der Zielfunktion an, den sie nicht mehr übersteigen kann, wenn die Lösung in bestimmter Weise teilweise konkretisiert ist[1].

Die Regel zur Berechnung der lower bounds b muß die Eigenschaft haben, daß b mit fortschreitender Konkretisation der Lösung (d.h. bei Weiterverfolgung eines Astes von Knoten zu Knoten) monoton steigt, d.h. sich von unten an den Optimalwert der Zielfunktion $f^+(y) = \max \{\bar{f}(y) \mid y \in V\}$[2] annähert[3].

---

1 Vgl. L.G. Mitten, Branch-and-Bound Methods: General Formulation and Properties, Operations Research, Band 18, 1970, S. 24-34, hier S. 26.

2 Darin bezeichnet V die Menge der zulässigen Lösungen.

3 Vgl. L.G. Mitten, Branch-and-Bound Methods, a.a.O., S. 27.

Die Regel zur Berechnung der upper bounds B muß die Eigenschaft haben, daß B mit fortschreitender Konkretisation der Lösung monoton abnimmt, d.h. sich von oben an $f^*(y)$ annähert[1]. Diese zu fordernden Eigenschaften der Bounding-Regeln entsprechen inhaltlich der strengen Anpassungsbedingung

(7) $\quad Z(z^l) \geq Z(z^k) \qquad$ für alle $l > k$,

in Zangwills Konvergenz-Theoremen A und B[2], die besagt, daß der Wert einer in geeigneter Weise definierten aus der Zielfunktion abgeleiteten Funktion Z in der Folge der von einem Algorithmus schrittweise generierten Lösungspunkte z^l (ausgehend von dem in einem beliebigen k-ten Schritt generierten Punkt z^k) niemals abnehmen darf.

Das "Branching", d.h. die Aufspaltung der Menge aller Punkte im Variationsraum aller Variablen in disjunkte Teilmengen, die grafisch als Äste eines Lösungsbaumes dargestellt werden können, erscheint als nichts anderes als ein allgemeines Prinzip, den n-dimensionalen Raum abzusuchen, wenn nur diskrete oder (bei entsprechender Dimensionierung[3]) ganzzahlige Variablenwerte zulässig sind[4].

---

1 Vgl. L.G. Mitten, Branch-and-Bound Methods, a.a.O., S. 27.

2 Siehe W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 91 bzw. S. 128.

3 Siehe S. 87 dieser Arbeit.

4 Folgt man Mitten, der die unimodalen Suchverfahren "Fibonacci Search" und "Bolzano Search" als Branch-and-Bound-Verfahren interpretiert, so muß man feststellen, daß die Aussage der Anwendungsbereich von Branch-and-Bound-Verfahren sei auf ganzzahlige Probleme beschränkt, nicht ganz richtig ist, Bei diesen Verfahren handelt es sich nämlich um kontinuierlich veränderbare Variable, indessen taugen sie nur für eine eindimensionale Suche über konvexe bzw. konkave

Die Nutzbarmachung des "Branching" zur Vermeidung einer vollständigen Enumeration steht und fällt aber mit den Möglichkeiten zur Bestimmung von Bounds, die die oben genannten Bedingungen erfüllen. Diese Möglichkeiten sind aber nicht in allen Problemen gegeben. Die upper bounds werden nämlich i.d.R. als Maximum[1] der Zielfunktion über einen durch Fallenlassen einer Nebenbedingung erweiterten Lösungsraum berechnet[2]. Handelt es sich z.B. um ein ganzzahliges lineares Programmierungsproblem, so kann man die Ganzzahligkeitsbedingung fallenlassen und die bounds mit Hilfe der Simplex-Methode berechnen[3]. In anderen konkreten Problemen aber kann die Berechnung der bounds in dieser Weise recht schwierig oder gar unmöglich sein, weil selbst für das modifizierte Problem keine geeigneten Lösungsverfahren zur Verfügung stehen. Für Branch and Bound gilt also dasselbe, was oben zur dynamischen Programmierung gesagt wurde: Das Prinzip ist durch konkrete Verfahren (hier für die Berechnung der bounds,dort für die Stufenoptimierungen) auszufüllen, deren spezielle Voraussetzungen den effektiven Anwendungsbereich einengen.

Bereiche und sind darüberhinaus nur zur approximativen Lösung - wenn auch mit beliebigem Genauigkeitsgrad - geeignet. Vgl. L.G. Mitten, Branch-and-Bound Methods, a.a.O., S. 31 f.

1 Die Unterscheidung zwischen Maximum und Supremum ist im Rahmen dieser Arbeit nicht erforderlich, denn "Für fast alle praktischen Probleme sind Supremum und Maximum äquivalent." G.L. Nemhauser, Einführung in die Praxis der dynamischen Programmierung, a.a.O., Fußnote zu S. 18.

2 Vgl. N. Agin, Optimum Seeking with Branch and Bound, a.a.O., S. 183; L.G. Mitten, Branch-and-Bound Methods, a.a.O., S. 25 und S. 30.

3 Vgl. z.B. H. Müller-Merbach, Operations Research, a.a.O., S. 361-367.

Wenn andererseits ein geeignetes Verfahren zur Bestimmung des Optimums über den erweiterten Lösungsraum und damit zur Berechnung geeigneter bounds zur Verfügung steht, so kann im übrigen der Fall eintreten, daß es die Anwendung des Branch-and-Bound-Prinzips überflüssig macht. Das ist dann der Fall, wenn das Optimum über den zur Berechnung der ersten Schranken erweiterten Lösungsraum innerhalb des Lösungsraumes des ursprünglich gestellten Problems liegt, d.h. die Berechnung einer Schranke bereits dessen optimale zulässige Lösung ergibt.

(b) Verwendung von Bounds als Verwerfkriterien

Mit einem "Suchverfahren zur (beliebig nichtlinearen) ganzzahligen Programmierung .., das man am besten als lexikographischen Branch-and-Bound-Algorithmus charakterisieren kann"[1], glauben Korte, Krelle und Oberhofer "ein allgemeines Verfahren ..., das bei allen ganzzahligen Programmierungsaufgaben anwendbar ist"[2], entwickelt zu haben.

Der Unterschied gegenüber anderen Branch-and-Bound-Verfahren besteht darin, daß die "Bounds" nicht als Kriterium für die (vorläufige) Auswahl eines weiter zu verfolgenden Astes, sondern für das (endgültige) Verwerfen von Teilmengen der Menge aller Niveaukombinationen, die die optimale Lösung nicht enthalten können, benutzt werden[3].

1 B. Korte - W. Krelle - W. Oberhofer, Ein lexikographischer Suchalgorithmus zur Lösung allgemeiner ganzzahliger Programmierungsaufgaben, Unternehmensforschung, Band 13, 1969, Teil I: S. 73-98, Teil II: S. 171-192, hier S. 74.

2 Ebenda, S. 79 (Hervorhebungen im Original durch Kursivdruck).

3 Ebenda, S. 79.

Das Kernstück des Verfahrens ist der Operator

$$(8) \qquad \Phi_k \circ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min_{\substack{x_i \in D_i \\ k < i \leq n}} g(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$ [1,2]

Dieser wird sowohl auf die Zielfunktion als auch auf sämtliche Restriktionen angewandt. Er bedeutet z.B. für den ersten Schritt (k=1): Es ist das Minimum der betreffenden Funktion g über die Variablen x_2 bis x_n für alternative Niveaus von x_1 zu bestimmen. Übersteigt sein Wert gewisse obere Schranken[2], so wird ein Teil des Variationsraumes $D = \prod_{i=1}^{n} D_i$ [3], der keine zulässige bzw. optimale Lösung enthalten kann[4], verworfen. Das Optimum ist determiniert, wenn bis auf einen Punkt (eine Niveaukombination) alle anderen Punkte und Teilmengen des Variationsraumes D, die den optimalen Punkt nicht enthalten können, verworfen sind.

---

1 B. Korte - W. Krelle - W. Oberhofer, Ein lexikographischer Suchalgorithmus, a.a.O., S. 87. Der Verfasser zitiert hier S. 87, da auf S. 81, wo dieser Operator definiert wird, offensichtlich ein Druckfehler übersehen wurde. Anstelle des Variablenindex i steht dort der Variantenindex ν .

2 Es ist zu beachten, daß sich die Autoren auf Minimierungsprobleme beziehen. Bei Maximierungsproblemen ist selbstverständlich über die letzten n-k Variablen zu maximieren, und das Verwerfkriterium muß auf die Unterschreitung einer unteren Schranke abstellen.

3 D_i ist die Menge der zulässigen Niveaus der iten Variablen.

4 Siehe B. Korte - W. Krelle - W. Oberhofer, a.a.O., S. 82.

Es erscheint zwar unmittelbar einleuchtend, daß dieses Verfahren theoretisch keinerlei einschränkende Anwendungsvoraussetzungen hat, doch dürften der praktischen Anwendung relativ enge Grenzen gesetzt sein. Dies wird durch die angegebenen Testbeispiele[1] nicht widerlegt. Die Autoren können dort zwar mit eindrucksvollen Angaben bezüglich der Rechenzeit aufwarten, doch handelt es sich dabei durchweg um extrem einfach strukturierte Probleme; spezielle Funktionstypen, besondere Eigenschaften des zulässigen Lösungsraumes und/oder geringe Anzahl von Variablen erleichtern dort die Verifizierung der Verwerf-Kriterien. Bei komplexeren Problemen sind dagegen erhebliche Schwierigkeiten zu erwarten[2].

"Im allgemeinen ist eine Berechnung von $\Phi \circ g$ sehr zeitaufwendig,da hierbei eine Funktion über n-k Variable minimiert werden muß"[3]. Praktisch unmöglich wird die Berechnung von $\Phi \circ g$, wenn es sich um komplizierte Funktionen handelt, insbesondere, wenn diese nicht in analytischer Form, sondern z.B. in Gestalt von Wertetabellen einzelner Komponenten vorliegen[4]. Wenn nicht besonders einfache Verhältnisse vorliegen, bleibt nichts anderes übrig, als das Minimum durch Enumeration aller Niveaukombinationen der letzten n-k Variablen zu

---

1 B. Korte - W. Krelle - W. Oberhofer, a.a.O., S. 181 ff.

2 Auf S. 87 weisen die Autoren selbst auf diese Schwierigkeiten hin.

3 B. Korte - W. Krelle - W. Oberhofer, a.a.O., S. 87.

4 Dieser Fall tritt in unternehmerischen Entscheidungsproblemen häufig auf. Z.B. werden in der chemischen Industrie bestimmte Mischungsprobleme optimiert, ohne daß zuvor eine zusammenhängende Zielfunktion analytisch definiert ist; zur Ermittlung der Zielfunktionswerte einzelner Niveaukombinationen der Variablen, die im Optimierungsalgorithmus benötigt werden, werden ad hoc entsprechende Testreihen durchgeführt.

bestimmen. Das bedeutet, daß allein in der ersten Suchstufe für je $\prod_{k=1}^{n} l_k = l_1 \cdot l_2 \cdot \ldots \cdot l_n$ [1] zum (i.d.R. größten) Teil unzulässige Niveaukombinationen also für mehr Punkte als beim einfachen Totalvergleich[2] im gegebenen Problem, der Wert von m+1 Funktionen[3] zu bestimmen ist[4].

Darüberhinaus ist der Operator überhaupt nicht anwendbar, wenn die Nebenbedingungen "derart komplex /sind/ (z.B. Nebenbedingungen kombinatorischer Art), daß sehr viel Aufwand notwendig ist, um diese Bedingungen als analytisch exakte Restriktionen zu formulieren"[5,6] und man der Empfehlung der Autoren gefolgt ist, "komplexe Nebenbedingungen nicht in eine Vielzahl einfacher Restriktionen aufzubrechen"[7].

Schließlich gilt auch hier, was oben zu den Branch-and-Bound-Methoden mit der Verwendung von Bounds als Auswahlkriterien gesagt wurde: Einerseits scheitert die behauptete allgemeine Anwendbarkeit daran, daß die Autoren für den Operator Φ kein konkretes Berechnungsverfahren angeben, daß also die Anwendungsvoraussetzungen der hierfür verfügbaren Methoden den Anwendungsbereich des "lexikographischen

---

1 n ist die Anzahl der Variablen, l_k die Anzahl der Varianten ($x_k = x_{k\nu}; \nu = 1, \ldots, l_k$) der k-ten Variablen.

2 Ist im Totalvergleich bei der Berechnung einer Restriktion ein Punkt als unzulässig erkannt worden, so brauchen ja für diesen die Werte der übrigen Funktionen nicht mehr berechnet zu werden.

3 m Restriktionen und die Zielfunktion.

4 Vgl. B. Korte - W. Krelle - W. Oberhofer, a.a.O., S. 87.

5 Ebenda, S. 75.

6 Man denke etwa an die Rundreisebedingung im "Problem des Handlungsreisenden".

7 B. Korte - W. Krelle - W. Oberhofer, a.a.O., S. 75.

Suchalgorithmus" begrenzen. Andererseits kann der Fall eintreten, daß bereits in der ersten Suchstufe mittels $\Phi \circ f$[1] ein optimaler Punkt[2] gefunden wird, der auch zulässig ist. In diesem Falle ist die Weiterverfolgung des Algorithmus überflüssig.

(4) Sequentielle Enumeration

Ein, abgesehen vom Zeitaufwand, generell anwendbares Verfahren zur Lösung kombinatorischer Probleme ist das der sequentiellen Enumeration. Es werden nacheinander alle zulässigen Niveaukombinationen aller Variablen gebildet[3] und berechnet. Aus der so entstehenden Tabelle wird diejenige Kombination ausgewählt, die den höchsten Zielfunktionswert aufweist.

"Das Verfahren der begrenzten Enumeration ist prinzipiell mit dem der Vollenumeration ... identisch. Jedoch wird für solche Zweige der Enumerationsprozeß abgebrochen, in denen mit Sicherheit keine bessere Lösung als die jeweils beste bekannte Lösung erwartet werden kann"[4]. Die verschie-

---

1 f bezeichnet die Zielfunktion.

2 Da für alle Niveaus der ersten Variablen die optimale Niveaukombination der letzten n-1 Variablen zu bestimmen ist, wird in der ersten Suchstufe tatsächlich ein (unter Vernachlässigung der Nebenbedingungen) optimaler Punkt determiniert.

3 Als Organisationsprinzip für die Enumeration bietet sich die Konstruktion eines Lösungsbaumes (vgl. S.70 dieser Arbeit) an. Deshalb zählt Müller-Merbach auch die sequentiell organisierte Enumeration zu den "Entscheidungsbaumverfahren". H. Müller-Merbach, Operations Research, a.a.O., S. 308 ff.

4 H. Müller-Merbach, Operations Research, a.a.O., S. 324.

denen nacheinander sukzessive (durch Festsetzen der einzelnen Variablenniveaus) zu konkretisierenden Lösungen werden dann nicht voll konkretisiert, wenn bei teilweiser Konkretisation schon zu erkennen ist, daß die aufzubauenden Lösungen sämtlich schlechter werden als die beste der zuvor voll aufgebauten Lösungen, d.h. sobald beim Aufbau einer Lösung die "Enumerationsgrenze", der Zielfunktionswert der besten bekannten Lösung[1] überschritten wird.

Eine ausführlichere Beschreibung dieses Verfahrens erübrigt sich hier, denn es ist dazu folgendes festzustellen: Eine erhebliche Verminderung des Rechenaufwandes gegenüber der Vollenumeration ist nur dann zu erzielen, wenn bei großer Anzahl der Variablen die Variationsbreite der einzelnen Variablen sehr gering ist, wie etwa bei Reihenfolgeproblemen, auf die sich Müller-Merbach bei seiner Darstellung bezieht[2].

Ferner ist das Verfahren nur dann sinnvoll anwendbar, wenn die Zielfunktion separabel ist, denn nur dann kann von einer teilweise konkretisierten Lösung auf den Wert der Zielfunktion für eine vollkonkretisierte Lösung und dessen Verhältnis zur Enumerationsgrenze geschlossen werden[3].

Der Vollständigkeit halber ist jedoch anzumerken, daß die Effizienz der begrenzten Enumeration u.U. gesteigert werden kann, wenn sie durch andere

---

1 Vgl. H. Müller-Merbach, Operations Research, a.a.O., S. 324 f.

2 Siehe ebenda und derselbe, Optimale Reihenfolgen, a.a.O., S. 31 f. und S. 102-123.

3 Vgl. H. Müller-Merbach, Optimale Reihenfolgen, a.a.O., S. 33 in Verbindung mit S. 3.

Verfahren (zur Bestimmung von Enumerationsgrenzen) ergänzt wird[1]. Hierbei gilt allerdings ebenfalls das auf Seite 28f. zur Berechnung von Bounds im Rahmen von Branch-and-Bound-Verfahren Gesagte.

(5) Der Anwendungsbereich der sukzessiven Optimierungsverfahren

Die vorstehend besprochenen Enumerationsverfahren haben zwar, was ihr jeweiliges Grundprinzip angeht, einen weiten Anwendungsbereich, der jedoch in der Praxis erheblich eingeengt sein kann. Zum einen ist dies dadurch begründet, daß sie der Ergänzung durch andere Verfahren bedürfen, zum anderen dadurch, daß ihre Effizienz sehr stark vom Problemtyp abhängig ist. Bei gewissen Strukturen haben sie sich gut bewährt, bei anderen erbringen sie (mit Ausnahme der dynamischen Programmierung) kaum eine Ersparnis an Rechenaufwand gegenüber der Vollenumeration. Der Grund hierfür liegt darin, daß das Organisationsprinzip der Enumeration, die Reihenfolge der zu prüfenden Variablen-Niveaukombinationen, ex ante systematisch festgelegt wird und sich nicht unmittelbar an der Zielfunktion orientiert.

1 Vgl. H. Müller-Merbach, Optimale Reihenfolgen, a.a.O., S. 31 und derselbe, Operations Research, a.a.O., S. 325.

C Der einschränkende Charakter der Anwendungsvoraussetzungen der mathematischen Optimierungsverfahren

I Struktureigenschaften empirischer Entscheidungsprobleme

1 Nichterfüllung der Anwendungsvoraussetzungen der mathematischen Optimierungsverfahren

a Eigenschaften der Zielfunktion in empirischen Problemen

Daß die genannten Voraussetzungen den Anwendungsbereich der einzelnen Optimierungsverfahren z.T. erheblich einschränken, wird sogleich ersichtlich, wenn man ihnen die in empirischen Entscheidungsproblemen[1] vorkommenden Eigenschaften von Zielfunktion und Lösungsraum gegenüberstellt.

Aufgrund der integrativen Interdependenz[2], die zwischen vielen Unternehmungsvariablen besteht, bzw. - was dasselbe besagt - aufgrund der Unlösbarkeit des betriebswirtschaftlichen Zurechnungsproblems[3] kann nicht generell erwartet werden, daß die Zielfunktion separabel ist; vielmehr wird die Ziel-

---

1 Im folgenden wird stets davon ausgegangen, daß das Entscheidungsmodell der empirischen Entscheidungssituation unter Berücksichtigung aller verfügbaren Informationen adäquat nachgebildet ist. Es bedarf daher nicht mehr der strengen terminologischen Trennung zwischen dem empirischen Problem und dem Modell.

2 Vgl. H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 26 sowie S. 118f. dieser Arbeit.

3 Vgl. D. Adam, Das Interdependenzproblem in der Investitionsrechnung und die Möglichkeiten einer Zurechnung von Erträgen auf einzelne Investitionsobjekte, Der Betrieb, 19. Jg., 1966, S. 989 - 993.

funktion in vielen Fällen komplexer[1] Natur sein. Das will besagen, sie kann Bestandteile wie z.B. Produkte von Variablenwerten enthalten. Man denke etwa an den Fall des Absatzverbundes substitutiver Güter. Hierbei würde sich der den Erlös (e) ausdrückenden Teil der Zielfunktion wie folgt ergeben:

Die Preis-Absatzfunktionen[2] würden lauten:

$$(9) \qquad p_1 = A_1 + B_{11}x_1 - B_{12}x_2$$

$$(10) \qquad p_2 = A_2 - B_{21}x_1 + B_{22}x_2$$

wobei p_1 und p_2 die realisierbaren Absatzpreise, x_1 und x_2 die zu planenden Absatzmengen der Güter 1 und 2 und die großen Buchstaben konstante Koeffizienten bedeuten. Der Erlös wäre demnach

$$(11) \qquad e = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$$

bzw., wenn man (9) und (10) für p_1 und p_2 einsetzt,

$$(21) \qquad e = A_1x_1+B_{11}x_1^2-B_{12}x_1x_2+A_2x_2-B_{21}x_1x_2+B_{22}x_2^2$$

Die Glieder mit multiplikativer Verknüpfung $B_{12}x_1x_2$ und $B_{21}x_1x_2$ würden die Anwendung solcher Optimierungsverfahren, die eine trennbare Zielfunktion voraussetzen, unmöglich machen.

---

1 "Komplex " soll hier nicht im mathematischen Sinne (komplexe Zahl = aus Realteil und Imaginärteil additiv zusammengesetzte Zahl), sondern im Sinne des allgemeinen Sprachgebrauchs als "zusammengeflochten","verwickelt" verstanden werden. Vgl. R. V. Kienle (Hrsg.), Keysers Fremdwörterlexikon, Heidelberg 1955, S. 206.

2 Zur Gestalt der Preis-Absatz-Funktion bei substitutivem Absatzverbund siehe z.B. W. Krelle, Preistheorie, Tübingen - Zürich 1961, S. 229; H. Schultz, The Theory and Measurement of Demand, 5. Aufl., Chicago - London 1966, S. 576.

Des weiteren kann, was keiner besonderen Begründung bedarf, nicht generell erwartet werden, daß die Zielfunktion konvex, konkav oder linear[1] ist oder eine sonstige spezielle Gestalt hat. Vielmehr gibt es viele ökonomische Probleme, in denen die relevanten Gewinn(bestandteil-)Funktionen Wendepunkte, Sprungstellen oder Knicke und dgl. aufweisen. Beispielhaft sei erinnert an den typischen Verlauf der Kostenfunktion bei intensitätsmäßiger Anpassung[2], die Kostenfunktion im Fall A der quantitativen Anpassung[3] bzw. die Kostenfunktion bei selektiver Anpassung[4] oder Erlösfunktionen[5]. In solchen Fällen versagen all diejenigen Optimierungsverfahren, die eine spezielle Gestalt der Zielfunktion voraussetzen.

Zwar lassen sich Modelle, in denen die Zielfunktion Sprungstellen und/oder Knicke aufweist, i.d.R. durch Aufspaltung der originären Variablen in mehrere Untervariable bei gleichzeitiger Einführung entsprechender Nebenbedingungen so umformen, daß eine bestimmten Anforderungen genügende Zielfunktion entsteht. Man denke etwa an die abschnittsweise Linearisierung eines nichtlinearen Problems. Indessen kann eine solche Anpassung der Zielfunktion an die Anwendungsvoraussetzungen eines mathematischen Verfahrens dazu führen, daß nunmehr die Anwendungsvoraussetzungen bezüglich der Nebenbedingungen verletzt werden und/oder daß man mit der Vermehrung der Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen an die Grenzen der verfügbaren Rechenkapazität stößt.

---

1 Für eine lineare Funktion trifft sowohl die strenge Definition der Konkavität als auch die der Konvexität zu.

2 E. Gutenberg, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Erster Band, a.a.O., S. 349 ff.

3 Ebenda S. 367 ff.

4 Ebenda S. 374 ff.

5 Derselbe, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Zweiter Band, Der Absatz, 7. Aufl., Berlin - Göttingen - Heidelberg 1964, S. 242, 249 ff., 284 ff.

Schließlich kann nicht generell erwartet werden, daß sich stets erste oder gar auch zweite Ableitungen bilden lassen. Optimierungsverfahren, für deren Anwendung diese Voraussetzung erfüllt sein muß, sind insbesondere dann unbrauchbar, wenn die Zielfunktion - was in praktischen Problemen relativ häufig vorkommt - nicht in analytischer Form sondern nur in Gestalt von Datentabellen vorliegt.[1]

Kurzum: Es besteht kein Zweifel, daß es betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme gibt, bei denen die Zielfunktion Eigenschaften hat, die den Anwendungsvoraussetzungen keiner der oben genannten Optimierungsmethoden entsprechen. Und selbst, wenn eine spezielle geforderte Eigenschaft vorliegt, kann es äußerst schwierig oder gar unmöglich sein, dies zu verifizieren.[2]

---

1 Vgl. z.B. H. Wagner, Simultane Planung von Investition, Beschäftigung und Finanzierung mit Hilfe der dynamischen Programmierung, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 37. Jg., 1967, S. 709 - 728, hier S. 711; L. Pack, Die Ermittlung der kostenminimalen Anpassungsprozeßkombination, ein Anwendungsbeispiel der dynamischen Programmierung, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 18. Jg. (NF), 1966, S. 466 - 476, hier S. 468.

2 Vgl. R. Pfranger, Ein heuristisches Verfahren zur globalen Optimierung, a.a.O., S. 28; siehe dazu auch W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O, S. 111: "In many applications .. although the function might be known to posses well-behaved partial derivatives, it might be quite difficult or time consuming to explicitly calculate them."

b Eigenschaften des Lösungsraumes in empirischen Problemen

Wenn im folgenden von den Eigenschaften des Lösungsraumes gesprochen werden soll, so erscheint es notwendig, zunächst zu klären, was der Verfasser unter "Lösungsraum" verstanden wissen will. Dazu ist etwas weiter auszuholen.

Gegeben ist eine in Variablen formulierte Entscheidungssituation. Die Variablen bedeuten die Aktionsarten, über die der Unternehmer zu entscheiden hat. Eine bestimmte Einzelhandlungsweise wird durch einen numerischen Wert oder, wie es im folgenden heißen soll, durch ein bestimmtes Niveau der betreffenden Variablen bezeichnet. Eine Handlungsweise im ganzen, die es festzulegen gilt, wird demgemäß durch eine Niveaukombination aller in die Entscheidung einbezogenen Variablen, d.h. eine Kombination von verschiedenen Variablen zugeordneten numerischen Werten, gekennzeichnet. Stellt man sich diese Kombination numerischer Werte in einem Koordinatensystem vor, so kann man auch sagen: Jede Handlungsweise kann durch einen Punkt im n-dimensionalen (wobei n die Anzahl der erfaßten Variablen bedeutet) euklidischen Raum E^n bezeichnet werden.

Nun stellen nicht alle denkbaren Niveaukombinationen der Variablen realisierbare Handlungsweisen dar, d.h. nicht jeder Punkt in E^n ist eine (zulässige) Lösung des gegebenen Problems. Nebenbedingungen (Restriktionen) teilen die Menge aller Punkte in E^n in disjunkte Teilmengen: Realisierbare, d.h. zulässige Niveaukombinationen (= Lösungen) und nicht realisierbare, d.h. unzulässige Niveaukombinationen. Die Menge der zulässigen Niveaukombinationen, aus denen die optimale (oder eine befriedigende) Lösung

des Problems zu bestimmen ist, sei als Lösungsraum (V) bezeichnet. Die Gestalt bzw. die Eigenschaften des Lösungsraumes werden naturgemäß durch die Nebenbedingungen des Problems bestimmt.

Was nun den einschränkenden Charakter der Anwendungsvoraussetzungen der oben genannten Optimierungsverfahren betrifft, so sind vier Fälle zu nennen:

Im ersten geht es um die bei den meisten Verfahren vorausgesetzte Konvexität des Lösungsraumes. Da die meisten in ökonomischen Problemen vorkommenden Restriktionen linear sein dürften, ist diese Voraussetzung i.d.R. erfüllt. Es sind jedoch auch Fälle denkbar, in denen nichtlineare Restriktionen vorkommen, so daß der Lösungsraum nicht konvex ist. Hierfür sei ein Beispiel genannt: In einem Problem, in dem u.a. über die Ausbringungsmenge x_i von n Produkten zu entscheiden ist, sei wegen Knappheit eines Rohstoffes (von dem R_j Einheiten verfügbar seien) die Restriktion (13) zu beachten:

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{ij} x_i \leq R_j$$

wobei A_{ij} die erforderliche Einsatzmenge des Rohstoffes j pro Einheit des Erzeugnisses i bedeutet. Ist das Problem differenzierter gestellt, so daß statt der Erzeugnismengen x_i die Einsatzintensitäten $\bar{x}_i$ und die Betriebszeiten t_i geplant werden sollen, so wird die entsprechende Nebenbedingung nichtlinear:

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot e_{ij}(\bar{x}_i) \leq R_j$$

wobei $\varphi_{ij}(\bar{x}_i)$ die Verbrauchsfunktion[1] bezeichnet.

Eine zweite Einschränkung des Anwendungsbereiches mathematischer Optimierungsmethoden ist bei den meisten Verfahren durch die Voraussetzung der kontinuierlichen Veränderlichkeit der Variablen gegeben. In praktischen Problemen gilt nämlich häufig nur eine endliche Anzahl von Variablenniveaus als zulässig. Dies kann verschiedene Ursachen haben. Zunächst sind alle Variablen, die eine Anzahl ausdrücken, nur in diskreten Sprüngen veränderbar (genauer: Sie können nur die Werte der natürlichen Zahlen annehmen). Man denke etwa an die Entscheidung über die Anzahl der in einem Betrieb einzusetzenden maschinellen Aggregate. Die Anzahl z.B. 3,7 ist ökonomisch nicht sinnvoll; eine Niveaukombination,in der die Variable "Anzahl der Aggregate" das Niveau 3,7 hat, ist also unzulässig , d.h. sie stellt keine Lösung des Problems dar bzw. sie ist nicht im Lösungsraum enthalten. Ferner ist an Variable zu denken, für die es aus technischen Gründen nur eine endliche Anzahl von zulässigen Niveaus gibt. Als Beispiel sei genannt die Variable Einsatzintensität eines maschinellen Aggregates, die nur durch Umrüsten (z.B. Einbau einer anderen Antriebsübersetzung) verändert werden kann. Undschließlich können auch von Variablen, die prinzipiell kontinuierlich veränderbar sind (z.B. Preise, Zeiträume, Mengen von flüssigen oder gasförmigen Produkten und dgl.) aus Gründen mangelhafter Detail-Informationen nur ganzzahlige Niveaus als zulässig gelten. Etwas überspitzt kann man sagen: Unendlich

---

1 Vgl. E. Gutenberg, Grundlagen ..., Band I, a.a.O., S. 317 ff.; W. Kilger, Produktions- und Kostentheorie, Wiesbaden 1958, S. 54 ff., zur Erfassung von Rohstoffen in Verbrauchsfunktionen siehe insbesondere S. 60.

kleine Veränderungen, mit denen in der traditionellen ökonomischen Theorie aus Gründen der mathematischen Konvenienz gerne gearbeitet wird, haben in der Wirklichkeit keine Parallele.[1]

Drittens ist zu erwähnen, daß es kaum ökonomische Variable gibt, für die negative Niveaus zulässig sind. Eine Einschränkung des Anwendungsbereiches bedeutet diese Tatsache jedoch nur für Optimumbestimmungen mittels der Differentialrechnung.

Und schließlich ist noch einmal auf den Umstand hinzuweisen, daß in unternehmerischen Entscheidungsproblemen die Anzahl der Restriktionen so groß sein kann, daß man bei Anwendung der oben genannten Methoden, insbesondere der dynamischen Programmierung, die Grenzen vertretbaren Rechenaufwandes überschreitet.

2 Illustration durch Beispiele

Nach den vorstehenden pauschalen Bemerkungen über den einschränkenden Charakter der Anwendungsvoraussetzungen der bisher besprochenen Optimierungsverfahren mögen drei Beispiele unternehmerischer Entscheidungsprobleme zur Illustration des Gesagten

---

1 Vgl. z.B. R. Dorfman, Application of Linear Programming to the Theory of the Firm, a.a.O., S. 11; - G. Laßmann, Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung für die betriebswirtschaftliche Kostentheorie, Band 6 von E. Gutenberg - W. Hasenack - K.Hax - E. Schäfer (Hrsg.), Beiträge zur betriebswirtschaftlichen Forschung, Köln - Opladen 1958, S. 46, Fußnote 82; E. Schneider, Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil: Wirtschaftspläne und wirtschaftliches Gleichgewicht in der Verkehrswirtschaft, 8. Aufl. Tübingen 1963, S. 169, 174; W. Wittmann, Lineare Programmierung und traditionelle Produktionstheorie, Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, 12. Jg. (NF) 1960, S. 1 - 17, hier S. 3 und 10.

dienen: Es soll damit deutlich gemacht werden, wie stark in der Modellkonstruktion von den empirischen Gegebenheiten abstrahiert werden muß, damit herkömmliche Rechenverfahren anwendbar sind. Damit wird die Notwendigkeit hervorgehoben, nach Verfahren zu suchen, mit denen wirklichkeitsgerechtere Modelle rechnerisch behandelt werden können, deren Anwendung also ohne Verfälschung der gegebenen Entscheidungssituation mit Rücksicht auf die Anwendungsvoraussetzungen möglich ist.

Die aufgezeigten Beispiele entwickeln sich aus in der betriebswirtschaftlichen Literatur gelösten Problemen durch Erweiterung der Fragestellung und Verallgemeinerung der Zusammenhänge. Aus der Frage nach der optimalen Kombination von "Anpassungsmaßnahmen" unter stationären Bedingungen wird das Problem der optimalen Produktions- und Absatzweise im einstufigen Einproduktbetrieb bei einperiodiger Betrachtung entwickelt. Die Frage nach dem optimalen Produktionsprogramm wird erweitert zum Problem der optimalen Produktions- und Absatzweise im einstufigen Mehrproduktbetrieb bei einperiodiger Betrachtung. Die Frage nach der optimalen Produktions- und Lagerplanung bei saisonalen Absatzschwankungen wird zum eigentlichen Anpassungsproblem von Absatz, Produktion und Betriebsgröße an im Zeitablauf wechselnde Marktverhältnisse ausgedehnt.

Da jedes dieser Probleme bei ausführlicher Behandlung den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen würde, möge dem Verfasser nachgesehen werden, daß die folgenden Ausführungen, was die Behandlung der Probleme an sich angeht, nicht tief in die Einzelheiten eingehen. Auf Erfassung aller denkbaren Zusammenhänge, auf Ausarbeitung alternativ möglicher Modellkonstruktionen sowie auf eingehende Auswertung der einschlägigen Literatur muß verzichtet

werden, denn es geht hier nicht in erster Linie um eine erschöpfende Behandlung der in der Praxis auftauchenden Probleme als solcher und um deren vollbefriedigende Lösung, sondern nur darum, aufzuzeigen, wie weit viele der in der Literatur behandelten Modelle vorhandene Struktur-Informationen über das Problem vernachlässigen und wie leicht eine wirklichkeitsnähere Modellformulierung die Anwendbarkeit der traditionellen Lösungstechniken aufhebt.

II Beispiele unternehmerischer Planungsprobleme und die Schwierigkeiten ihrer Lösung

1 Das Problem der optimalen Produktionsweise bei verschiedenen Anpassungsmöglichkeiten

a Die Fragestellung der traditionellen Produktions- und Kostentheorie als Ausgangspunkt

Das erste hier zu behandelnde Problem sei aus der traditionellen Fragestellung der Produktions- und Kostentheorie entwickelt. Diese untersucht den funktionalen Zusammenhang zwischen Faktoreinsatzmengen und Erzeugnismengen[1], um in einem zweiten Schritt, durch Multiplikation der Faktoreinsatzmengen mit den zugehörigen

---

1 Dieser Zusammenhang wird bekanntlich in einer "Produktionsfunktion" zum Ausdruck gebracht. Vgl. z.B. G. Laßmann, Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung ..., a.a.O., S. 19; K. Förstner - R.Henn, Dynamische Produktionstheorie und lineare Programmierung, Meisenheim am Glan 1957, S. 16; W. Kilger, Produktions- und Kostentheorie, a.a.O., S. 11. Gutenberg spricht hier auch von dem "Gesetz der Faktorkombination", E. Gutenberg. Grundlagen ... Erster Band, a.a.O., S. 286.

Faktorpreisen[1] einen funktionalen Zusammenhang zwischen Erzeugnismengen und Kosten[2] zu ermitteln.[3] In einem weiteren Schritt wäre alsdann aus der Gegenüberstellung von Erlös- und Kostenkurven die optimale Erzeugnismenge zu bestimmen.[4] Zwar gehört dieser letzte Schritt - streng genommen - nicht mehr in den Bereich der Produktions- und Kostentheorie, doch kann ihr letzter Zweck erst hiermit erfüllt werden; eine isolierte Produktions- und Kostentheorie wäre ein willkürlich abgeschnittener

---

1 Die allgemeine Kostengleichung $k = \sum_{j=1}^{m} Q_j \cdot r_j$ (vgl. E. Heinen, Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, Band I, Begriff und Theorie der Kosten, Wiesbaden 1965, S. 84 und S. 116; W. Kilger, Produktions- und Kostentheorie, a.a.O., S. 35; G. Laßmann, Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung ... a.a.O., S. 37) versteht der Verfasser nicht schon an sich als Definitionsgleichung im Sinne des wertmäßigen Kostenbegriffes (d.h. daß in der Multiplikation von Faktorpreisen und Faktormengen eine "Bewertung" zum Ausdruck komme), sondern lediglich als ein formales Berechnungsschema für die Kostenziffer im Sinne des pagatorischen Kostenbegriffs. Vgl. H. Koch, Zur Diskussion um den Kostenbegriff in: H. Koch, Grundprobleme der Kostenrechnung, Köln - Opladen 1966, S. 9 - 47, hier S. 15, Fußnote 15 b.

2 Dieser Zusammenhang wird bekanntlich in einer "Kostenfunktion" erfaßt. Vgl. z.B. W. Kilger, Produktions- und Kostentheorie, a.a.O., S. 17 f.

3 G. Laßmann, Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung ... a.a.O., S. 8; E. Schneider, Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil, a.a.O., 7. Aufl. 1961, S. 96; E. Heinen, Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, a.a.O., S. 118.

4 H. Albach, Produktionsplanung auf der Grundlage technischer Verbrauchsfunktionen in Heft 105 der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Köln - Opladen 1961, S. 45 - 94, hier S. 45.

Sektor der Theorie der Unternehmung.[1]

Zur Klärung dieser Fragestellung wurde zunächst nach einem eindeutigen Zusammenhang zwischen Kosten und Ausbringung in Form einer zweidimensionalen Kostenfunktion gesucht. Ihre Ableitung ist möglich, wenn zwischen Ausbringung und Faktoreinsatzmengen ein eindeutiger unmittelbarer Zusammenhang unterstellt wird,[2] wenn also m.a.W. die Produktionsweise an sich als der unternehmerischen Planung entzogen behandelt wird. Indessen zeigt Gutenbergs produktionstheoretisches Konzept,[3] daß selbst unter Einhaltung der ceteris-paribus-Klausel bezüglich der Kosteneinflußgrößen Faktorqualität,

---

1 Vgl. die in jüngster Zeit immer häufiger zu hörende Forderung nach Simultaneität bei der Optimumbestimmung, z.B. bei E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 159; H. Koch, Die Theorie der Unternehmung,a.a.O., S. 388; D. Adam, Das Interdependenzproblem in der Investitionsrechnung ..., a.a.O.; W. Kilger, Planungsrechnung und Entscheidungsmodelle des Operations Research, in: Unternehmensplanung als Instrument der Unternehmensführung, Bd. 9 der Schriftenreihe der Arbeitsgemeinschaft Planungsrechnung e.V. (AGPLAN), Wiesbaden 1965, S. 55 - 75, hier S. 56; H. Koch, Betriebliche Planung, a.a.O., S. 36; P. Vischer, Simultane Produktions- und Absatzplanung, Rechnungstechnische und organisatorische Probleme mathematischer Programmierungsmodelle, Wiesbaden 1967, S. 22 ff.; D. Adam, Koordinationsprobleme bei dezentralen Entscheidungen, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 39. Jg., 1969, S. 615 - 632, hier S. 615; Th. Reichmann, Die Bestimmung des optimalen Produktionsplans bei mehrstufigen Fertigungsprozessen in Saisonunternehmen, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 38. Jg., 1968, S. 683 - 700, hier S. 683; H. Meyhak, Simultane Gesamtplanung im mehrstufigen Mehrproduktunternehmen, Ein Modell der dynamischen linearen Planungsrechnung, Wiesbaden 1970, S. 1.

2 Vgl. G. Laßmann, Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung ..., a.a.O., S. 151.

3 E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 314 - 325.

Faktorpreise und Fertigungsprogramm[1] ein solcher eindeutiger unmittelbarer Zusammenhang nicht besteht.[2] Je nach der Art und Weise, in welcher der Produktionsapparat an Beschäftigungsschwankungen angepaßt wird, ergibt sich für alternative Ausbringungsmengen ein anderer Kostenverlauf.

b Die Problemstellung

Auf der Grundlage von Struktur-Informationen über die Entscheidungssituation, die die moderne Kostentheorie[3] liefert, stellt sich nicht nur das

---

1 E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 332 - 335; derselbe, Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, 1. Lieferung, Reihe A, 1. Beitrag von E. Gutenberg (Hrsg.), Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1958, S. 61 f.

2 "Die .. Untersuchungen zur Kostentheorie haben zu dem Ergebnis geführt, daß die Abhängigkeit der Kosten vom Beschäftigungsgrad nicht durch eine [im Original kursiv gedruckt] Kostenkurve zum Ausdruck gebracht werden kann, wie die traditionelle Kostentheorie behauptet. Vielmehr erscheint es erforderlich, die eine Kostenkurve durch ein System von Kostenkurven zu ersetzen ..." E. Gutenberg. Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 377.

3 Es ist hier nicht der Platz, eine Grundsatzdiskussion über die Produktionstheorie anzustellen. Ungeachtet der von Heinen in der "Produktionsfunktion von Typ C" (E. Heinen, Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, a.a.O., S. 220 - 307) vorgelegten Weiterentwicklung der modernen Produktionstheorie sei hier der Einfachheit halber als gesichert unterstellt, daß die Gutenberg-Produktionsfunktion (vgl. zu dieser Bezeichnung H. Albach, Zur Verbindung von Produktionstheorie und Investitionstheorie, in: H. Koch (Hrsg.), Zur Theorie der Unternehmung, Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg, Wiesbaden 1962, S. 137 - 203, hier S. 154; H. Jacob, Produktionsplanung und Kostentheorie, ebenda S. 205 - 268, hier S. 207) die Bedingungen der industriellen Produktion besser erfaßt als das Ertragsgesetz bzw. eine substitutionale Produktionsfunktion. Vgl. H. Albach, Zur Verbindung von Produktionstheorie und Investitionstheorie, a.a.O., S. 139 ff. und die ebenda in Fußnote 22, S. 147, angegebene Literatur.

Problem der optimalen Produktions- und Absatzmengen.[1] In Wirklichkeit ist die Problemstellung differenzierter: Es ist zu fragen nach der optimalen Kombination der Verfahrenskomponenten[2] Anzahl, Einsatzzeit und Einsatzintensität[3] der

---

1 Hier wird grundsätzlich Gleichheit von Produktions- und Absatzmenge unterstellt. Wesentlich andere Probleme ergeben sich erst, wenn man in einer mehrperiodigen Betrachtung bei wechselnden Marktverhältnissen zwischen Produktion und Absatz Lagerbestandsveränderungen in die Planung einbezieht. Hierauf aber soll erst weiter unten eingegangen werden.

2 Der Begriff "Verfahrenskomponenten" wurde übernommen von H. Koch, Das Gesetz vom abnehmenden Kapazitätszuwachs und seine unternehmungstheoretische Bedeutung (Einzelveröffentlichung aus "Produktionstheorie und Produktionsplanung", Festschrift für Karl Hax zum 65. Geburtstag), Köln - Opladen 1966, S. 137.
An dieser Stelle sei ganz allgemein angemerkt, daß es treffender erscheint, von den "Verfahrenskomponenten" Anzahl der eingesetzten Aggregate, Einsatzintensität und Einsatzzeit als von quantitativer, intensitätsmäßiger und zeitlicher "Anpassung" zu sprechen. Denn es geht ja hier gar nicht um die "Anpassung" der Ausbringungsmenge, also einen Vorgang, der nur im Zeitablauf denkbar ist, sondern um die Auswahl einer aus alternativen Ausbringungsmengen pro Periode (vgl. E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 327).

3 Der Katalog der Verfahrenskomponenten kann noch verfeinert werden durch Unterscheidung der Fälle A und B quantitativer "Anpassung" (E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 368) und die zeitliche Anpassung mit der Anzahl der pro Periode zu verfahrenen Schichten und der zeitlichen Anpassung mit der Länge der einzelnen Schichten; das Problem würde weiter verkompliziert, wenn von ungleichen Schichten (man denke etwa an Nachtarbeitszuschläge, Zuschläge für Sonn- und Feiertagsarbeit und dgl.) ausgegangen würde.

im Betrieb vorhandenen Aggregate.[1]

Unterstellt man einen einstufigen Einproduktbetrieb, der über L funktionsgleiche z.T. qualitativ verschiedene Aggregate verfügt und dessen Produktionsweise für eine Periode festgelegt werden soll, so ist das Problem wie folgt zu präzisieren: Variable sind statt der Produktionsmenge x die Intensitäten $\bar{x}_l$ und die Zeiten t_l der einzelnen Aggregate l[2]. Optimalitätskriterium ist der maximale Gewinn aus Produktion und Absatz der Gesamtausbringung

$$x = \sum_{l=1}^{L} \bar{x}_l \cdot t_l .$$

Es ist also zu maximieren die Differenz zwischen Erlösen und Kosten. Die Erlöse ergeben sich dabei als Produkt des Absatzpreises p nach Maßgabe der Preis-Absatz-Funktion $p = A - Bx$ mit der Gesamtausbringung $\sum_{l=1}^{L} \bar{x}_l t_l$.

---

1 Unter einem "Aggregat" wird hier nicht schlechthin eine Maschine sondern ein Arbeitsplatz unter Einschluß der Maschine, des Werkzeugs, der Beleuchtungs- und Belüftungseinrichtungen usw. sowie der zugehörigen Arbeitskräfte, also ein in sich abgeschlossener Komplex im Produktionsapparat als der Ort, an dem sich Elementarkombinationen im Sinne Heinens (E. Heinen, Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, a.a.O., S. 220 - 222) vollziehen, verstanden.

2 Die Variable Anzahl der eingesetzten Aggregate wird nicht explizit erfaßt: Sie ist gleich der Anzahl der von Null verschiedenen t_l, denn ein Aggregat, das Null Zeiteinheiten l lang eingesetzt wird, wird offensichtlich gar nicht eingesetzt.

Die Kosten ergeben sich als Summe der Produkte aus Einsatzzeit und Kosten pro Zeiteinheit nach Maßgabe der mit den Faktorpreisen q_n multiplizierten Verbrauchsfunktionen $\varphi_{ln}(\bar{x}_l)$.

$$(15)\quad g = A \cdot \sum_{l=1}^{L} \bar{x}_l t_l - B\left(\sum_{l=1}^{L} \bar{x}_l t_l\right)^2 - \sum_{l=1}^{L} t_l \cdot \sum_{n=1}^{N} q_n \cdot \varphi_{ln}(\bar{x}_l) \longrightarrow \max!$$

Dabei ist neben den Nichtnegativitätsbedingungen

$$(16)\quad \bar{x}_l \geq 0 \quad \text{für} \quad l = 1 \ldots L$$

$$(17)\quad t_l \geq 0 \quad \text{für} \quad l = 1 \ldots L$$

zu beachten, daß die maximal zulässige Einsatzintensität und die in der Periode verfügbare Zeit nicht überschritten werden:

$$(18)\quad \bar{x}_l \leq \bar{X}_{l\max} \quad \text{für} \quad l = 1 \ldots L$$

$$(19)\quad t_l \leq T \quad \text{für} \quad l = 1 \ldots L$$

Ferner darf der Faktoreinsatz nicht die verfügbaren Mengen überschreiten:

$$(20)\quad \sum_{l=1}^{L} \varphi_{ln}(\bar{x}_l) \leq R_n \quad \text{für} \quad n = 1 \ldots N$$

Und schließlich kann infolge mangelhafter numerischer Informationen bzw. aufgrund der Vorentscheidung über den Genauigkeitsgrad der Wirtschaftlichkeitsrechnung die Ganzzahligkeitsbedingung für einige oder alle Variablen gelten.[1]

---

1 Vgl. z.B. L. Pack, Die Ermittlung der optimalen Anpassungsprozeßkombination..., a.a.O., S. 468.

Gutenberg selbst hat dieses Problem nicht gelöst. Für ein Teilproblem[1] allerdings sind in der Literatur verschiedene Lösungswege beschrieben worden. Genannt seien hier die Arbeiten von Albach[2], Jacob[3] und Pack[4]. Gemeint ist das Problem der kostenminimalen Produktionsweise für eine gegebene Ausbringungsmenge[5], das durch die folgende Zielfunktion und Nebenbedingung gekennzeichnet ist:

$$(21) \quad k = \sum_{l=1}^{L} t_l \cdot k_l(\bar{x}_l) \longrightarrow \min!$$

$$(22) \quad \sum_{l=1}^{L} t_l \bar{x}_l = X$$

$$(23) \quad 0 \leq \bar{x}_l \leq \bar{X}_{l\max} \qquad \text{für } l = 1 \ldots L$$

$$(24) \quad 0 \leq t_l \leq T \qquad \text{für } l = 1 \ldots L$$

---

1 Beschränkt man sich auf den Bereich der Produktions- und Kostentheorie, so ist der Ausdruck "Teilproblem" selbstverständlich nicht gerechtfertigt. Hier aber wird, wie gesagt, das eigentliche unternehmerische Entscheidungsproblem, für dessen Lösung die Arbeiten zur Produktions- und Kostentheorie eine Vorstufe sein sollen (vgl. S. 90 f. der vorliegenden Arbeit), in der simultanen Festlegung von optimaler Produktions- und Absatzweise gesehen.

2 H. Albach, Produktionsplanung auf der Grundlage technischer Verbrauchsfunktionen, a.a.O.

3 H. Jacob, Produktionsplanung und Kostentheorie, a.a.O.

4 L. Pack, Die Elastizität der Kosten, a.a.O., S. 315 - 322.

5 Die Lösung des Problems für eine gegebene Ausbringungsmenge ist, wenn sie in allgemeinbegrifflicher Form vorliegt, äquivalent mit der Lösung für alternative Ausbringungsmengen (also der Ermittlung einer Minimalkostenfunktion und der Bedingung für ihre Einhaltung) und umgekehrt.

Darin bedeutet k die zu minimierenden Periodenkosten, k_l Kosten des l-ten Aggregates pro Zeiteinheit und X die vorgegebene Ausbringungsmenge. Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß die genannten Autoren zusätzlich noch mehr oder weniger pratikable Lösungswege für verschiedene Modifikationen des hier aus Gründen der Vergleichbarkeit herausgegriffenen Grundproblems[1] skizzieren. Indessen erfassen auch diese Modifikationen - sie laufen zum größten Teil darauf hinaus, daß das Grundproblem mehrfach unter parametrischer Veränderung bestimmter Größen zu lösen und das Optimum Optimorum in einem abschließenden Alternativenvergleich zu bestimmen ist - nicht voll die hier aufgezeigte Problemstellung.

c Lösungsansätze in der Literatur

(1) Der Lösungsweg von Jacob

Jacob entwickelt, von der Ausbringungsmenge x = 0 ausgehend, eine zweidimensionale Minimalkostenkurve nach Maßgabe des minimalen Kostenzuwachses. Es ergibt sich eine stetige, teils linear, teils gekrümmt ansteigende Kostenkurve für alle Produktmengen von Null bis zur Kapazitätsgrenze mit (im Extremfall von L funktionsgleichen aber qualitativ verschiedenen Aggregaten) 2 L Intervallen, für die die Intervallgrenzen und verschiedenen Funktionsgesetze zu bestimmen sind. Um die optimale Produktionsweise zu bestimmen, muß man alsdann das zutreffende

---

1 H. Albach, Produktionsplanung ..., a.a.O., S. 55 - 59; H. Jacob, Produktionsplanung und Kostentheorie, a.a.O., S. 212 - 226; L. Pack, Die Elastizität der Kosten, a.a.O., S. 315 - 322 (bei Pack handelt es sich um den Fall "d,ß im Betrieb 2").

Intervall bestimmen und nach Maßgabe dessen Funktionsgesetzes mit Hilfe der Differentialrechnung unter Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren eine bedingte Minimierung durchführen.

Das Verfahren erscheint insofern etwas umständlich, als die Rechnung eine umfassende Kostenkurve über den gesamten Ausbringungsspielraum von Null bis zur Kapazitätsgrenze ergibt, von der schließlich nur ein einziges Intervall interessant ist.[1]

Erweitert man die Problemstellung z.B. um die Berücksichtigung von Anlaufkosten[2], so ist für jede Kombination einzusetzender Aggregate[3] das oben angedeutete Verfahren anzuwenden und anschließnd das Optimum Optimorum im "Kombinationsvergleich" zu bestimmen. Da die Anzahl der zu untersuchenden Kombinationen leicht ünübersehbar groß werden kann, wird als approximative Lösungsmethode "das Verfahren der ganzzahligen Programmierung"[4] vorgeschlagen,

---

1 Vgl. G. Laßmann, Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung ..., a.a.O., S. 157.

2 H. Jacob, Produktionsplanung und Kostentheorie, a.a.O., S. 230 ff.

3 Einige der logisch denkbaren Kombinationen können allerdings aufgrund von Vorüberlegungen ausgeschlossen werden. Dies aber bedeutet keine spezielle Vereinfachung des Jacobschen Lösungsweges, denn solche Vorüberlegungen können auch bei anderen Optimierungsverfahren, z.B. bei dem später vorzuschlagenden Suchverfahren des steilsten Koordinatenanstiegs berücksichtigt werden, indem man Lösungen, von denen man von vornherein weiß, daß sie nicht optimal sein können, durch besondere Nebenbedingungen als unzulässig erklärt.

4 H. Jacob, Produktionsplanung und Kostentheorie, a.a.O., S. 231 f.

das allerdings - z.B. angesichts der Erfahrungen Adams hiermit[1] - wenig erfolgversprechend erscheinen will. Das oben gestellte Problem der simultanen Festlegung von optimaler Produktions- und Absatzweise schließlich ist auf der Grundlage von Jacobs Methode praktisch nur noch formal[2] zu lösen. Zwar gilt selbstverständlich das Optimalitätskriterium der Gleichheit von Grenzerlösen und Grenzkosten[3], doch kann die rechnerische Bestimmung des Schnittpunktes der Grenzerlös- und der Grenzkostenkurve mit unvertretbar hohem Aufwand verbunden sein. Nach den Funktionsgesetzen eines jeden Intervalls der Kostenkurve wäre nämlich der Schnittpunkt zu berechnen und daraufhin zu prüfen, ob er tatsächlich im Gültigkeitsbereich des betreffenden Intervall-Funktionsgesetzes liegt.

Der von Jacob beschriebene Lösungsweg ist also für das Problem der im Hinblick auf Erlös und Kosten optimalen Kombination der Verfahrenskomponenten nur in besonders einfach gelagerten Fällen praktisch anwendbar.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß Pack den gleichen Lösungsweg andeutet. Dazu formuliert er zu dem Problem seines " Betriebes 2 (Fall d, ß)" die Aussage: "Ein rational handelnder Unternehmer erhöht (vermindert) zur Minimierung der Kosten

---

1 D. Adam, Produktionsplanung bei Sortenfertigung, a.a.O., Diss. S. 145 ff.

2 Siehe H. Jacob, Produktionsplanung und Kostentheorie, a.a.O., Abb. 5, S. 242.

3 Es sind aber auch Fälle möglich, in denen dieses Kriterium nicht ausreicht, dann nämlich, wenn die Grenzerlöskurve gerade durch eine Sprungstelle der Grenzkostenkurve (die einer Knickstelle der Gesamtkostenkurve entspricht) geht.

bei steigender (sinkender) Leistungsmenge von den Kosteneinflußgrößen Leistungszeit und Leistungsintensität stets diejenige, deren Grenzkosten in bezug auf die Leistungsmenge am niedrigsten (höchsten) sind, und setzt die Zahl von Produktiveinheiten[1] ein, welcher unter der zuvor genannten Bedingung die niedrigsten Kosten zugeordnet sind."[2]

(2) Die Lösung mittels linearer Programmierung

Lösungsmöglichkeiten des (Teil-)Problems der kostenminimalen Einsatzweise der Aggregate für eine gegebene Ausbringungsmenge mittels linearer Programmierung werden von Jacob[3], Albach[4] und Pack[5] aufgezeigt. Lehnt man sich an Albachs Darstellung an, so wird

---

1 Pack benutzt den Ausdruck "Produktiveinheit" für dasselbe, was hier als "Aggregat" bezeichnet wird.

2 L. Pack, Die Elastizität der Kosten, a.a.O., S. 316.

3 H. Jacob, Produktionsplanung und Kostentheorie, a.a.O., S. 231 ff.

4 H. Albach, Produktionsplanung ..., a.a.O. Die Darstellung bei Albach ist allerdings insofern unvollständig, als er die Möglichkeit quantitativer Anpassung teilweise übersehen hat.

5 L. Pack, Die Elastizität der Kosten, a.a.O., S.319f. Pack wählt allerdings nicht die Intensitätsstufen der einzelnen Variablen sondern die Intervalle der Jacobschen Minimalkostenkurve als Variable und die durchschnittlichen Kostenziffern der Intervalle als Zielfunktionskoeffizienten. Damit ist nur eine approximative Lösung mit ex-ante unkontrollierbarem Genauigkeitsgrad erreichbar. (L. Pack, Die Ermittlung der optimalen Anpassungsprozeßkombination ..., a.a.O., Fußnote 4 zu S.467). Dieser Ansatz ist eigentlich nur dazu geeignet, das zutreffende Intervall für die kostenminimale Erstellung einer gegebenen Ausbringungsmenge zu errechnen, was auch ohne lineare Programmierung leicht möglich ist. (Siehe H. Jacob, Produktionsplanung und Kostentheorie, a.a.O., S. 222)

das an sich nichtlineare Problem (die Kostenfunktionen $k_1(\bar{x}_1)$ sind i.d.R. nichtlinear) linearisiert, indem für alternative diskrete Intensitätsstufen[1] eines jeden Aggregates ein "Prozeß"[2] definiert wird. Die Faktoreinsatzkoeffizienten der Prozesse sind aus den für die entsprechenden Intensitätsstufen geltenden Punkten der Verbrauchsfunktionen[3] zu bestimmen. Variable des Problems sind dann die Prozeßniveaus, das sind die Einsatzzeiten der einzelnen Aggregate mit jeweils bestimmter Intensität, die zwischen Null und der maximalen Einsatzzeit[4] veränderlich sind. Dabei ist die Nebenbedingung zu beachten, daß die Summe der Einsatzzeiten eines Aggregates über alle Intensitätsstufen ebenfalls nicht größer als die maximale Einsatzzeit des

---

1 Eine exakte Lösung mit kontinuierlicher Intensitätsvariabilität ist nicht möglich, doch kann durch Erhöhung der Anzahl der betrachteten Intensitätsstufen beliebige Genauigkeit erreicht werden. Dies geht allerdings zulasten des Rechenaufwandes und kann u.U. gar die Rechner-Kapazität überschreiten.

2 Ein Prozeß wird festgelegt durch "a set of ratios obtaining among rates of consumption of various inputs and rates of production of various outputs" (R. Dorfmann, Mathematical ... Programming ..., a.a.O., S. 798), also (für den Fall der homogenen Produktion) durch ein System von Produktionskoeffizienten.

3 E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 315.

4 Die quantitative Anpassung wird dabei als Spezialfall der zeitlichen Anpassung angesehen, da die Anzahl der einzusetzenden Aggregate gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Gesamteinsatzzeiten der Aggregate (Summen über alle Intensitätsstufen je eines Aggregates) ist.
Vgl. dazu auch E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 344, wo es merkwürdigerweise umgekehrt heißt: "Die zeitliche Anpassung stellt einen Spezialfall der quantitativen Anpassung dar."

Aggregates sein darf.[1] Da die Faktoreinsatzkoeffizienten nur mit der Intensität variieren, diese aber bei jedem Prozeß ex definitione konstant ist, kann die Lösung des so formulierten Problems mittels linearer Programmierung bestimmt werden.

Die Erweiterung des Problems, z.B. durch Berücksichtigung von Anlaufkosten kann formal durch Einführung ganzzahliger Hilfsvariabler bewältigt werden.[2]

Das Problem der simultanen Bestimmung der optimalen Produktions- und Absatzweise jedoch ist auf diese Weise nur lösbar, wenn der Absatzpreis konstant ist. Gelten für alternative Absatzmengen unterschiedliche Preise, so ist eine Lösung auf diesem Wege nicht mehr möglich. Zwar kann durch Einführung zusätzlicher Hilfsvariabler für alternative Abschnitte der Preis-Absatz-Funktion und der ihren Gültigkeitsbereich und die Kontinuität zwischen Produktions- und Absatzmengen erfassenden Nebenbedingungen auch die Absatzpolitik bei fallender Preis-Absatzkurve formal berücksichtigt werden, doch wird dann i.d.R. die Anzahl von Variablen und Nebenbedingungen die Kapazität eines jeden Elektronenrechners sprengen. Dies gilt umso mehr als in

---

1 Diese Bedingung bewirkt, daß im Optimum für jedes Aggregat keine, eine oder maximal zwei Intensitätsstufen mit von Null verschiedener Einsatzzeit erscheinen. Letzteres deutet darauf hin, daß die Intensitätsstufen nicht "richtig" gewählt sind, daß die wirklich optimale Intensität zwischen den beiden benachbarten Intensitätsstufen zu suchen ist.

2 Es sei aber an die zuweilen sehr schlechten Konvergenzeigenschaften der Verfahren zur ganzzahligen linearen Programmierung erinnert. Vgl. Fußnote 1 zu Seite 100.

dem einfachen Problem die Anzahl der Variablen ohnehin schon sehr groß ist. Sie ist gleich dem Produkt aus der Anzahl der verfügbaren Aggregate und der je Aggregat zu berücksichtigenden Intensitätsstufen im Vergleich zu der Anzahl 2^L von originären Variablen (Intensitäten und Einsatzzeiten der L Aggregate). Schon in dem oben skizzierten durchaus erweiterungsbedürftigen Modell stößt also die Awendung der linearen Programmierung als Lösungsmethode auf Grenzen.

(3) Die Lösung mittels dynamischer Programmierung

Pack schlägt die dynamische Programmierung als Lösungsverfahren für das Problem "der optimalen Anpassungsprozeßkombination" vor.[1] Da die Aggregatkosten als voneinander unabhängig vorausgesetzt werden, kann bei jedem Aggregat einzeln die optimale Einsatzzeit und die optimale Intensität mit den zugehörigen Kosten als Funktion alternativer Ausbringungsmengen des jeweils betrachteten Aggregats bestimmt werden. Auf der Grundlage dieser aggregatbezogenen Minimalkostenkombinationen kann alsdann mittels dynamischer Programmierung die kostenminimale Verteilung einer gegebenen (bzw. alternativer gegebener) Ausbringungsmenge(n) auf die einzelnen Aggregate bestimmt werden. Die optimale Kombination von Einsatzzeit und -Intensität der einzusetzenden Aggregate wird schließlich nach Maßgabe der aggregatbezogenen Minimalkostenfunktionen bestimmt.

---

1 L. Pack, Die Elastizität der Kosten, a.a.O., S. 315 - 322; derselbe, Die Ermittlung der optimalen Anpassungsprozeßkombination, a.a.O., S. 476.

Bei diesem Verfahren bedeutet auch die Erweiterung der Problemstellung z.B. durch Berücksichtigung von Anlaufkosten oder die Einführung von Ganzzahligkeitsbedingungen keine besondere Schwierigkeit. Will man jedoch Produktions- und Absatzweise simultan optimieren, so ist dieses Lösungsverfahren nicht mehr anwendbar, denn die Höhe des Erlöses (und aller partiellen Grenzerlöse) ist von allen Aggregatausbringungsmengen gemeinsam abhängig (die Erlöse können den einzelnen Aggregaten nicht zugerechnt werden), so daß die Zielfunktion inseparabel ist. Sind schließlich Faktorknappheiten zu berücksichtigen, so scheitert die praktische Anwendung der dynamischen Programmierung an der Anzahl der Restriktionen bzw. der hierfür zu definierenden Zustandsvariablen.

d Die Notwendigkeit allgemeiner Lösungsverfahren

Betrachtet man das oben skizzierte Problem der optimalen Kombination der Verfahrenskomponenten Art und Anzahl der einzusetzenden Aggregate, Einsatzzeit und Einsatzintensität unter simultaner Berücksichtigung des Absatzes und erweitert man es gar durch Berücksichtigung von Überstundenzuschlägen, Inbetriebnahmekosten und sonstiger Komplikationen, so muß man feststellen, daß die Anwendung der genannten Optimierungsverfahren auf Grenzen stößt. Die Lösung eines alle Struktur-Informationen über die Entscheidungssituation adäquat erfassenden Modells erfordert also ein Verfahren, dessen Anwendungsvoraussetzungen weniger einschränkend sind, ein Verfahren,bei dem Stetigkeit oder Nichtstetigkeit, Linearität oder Nichtlinearität,

Separabilität oder Nichtseparabilität und die Anzahl der Knicke der Zielfunktion sowie Anzahl und Gestalt der Nebenbedingungen möglichst unerheblich sein und Aufspaltungen originärer Variabler in mehrere Untervariable und Einführung von Hilfsvariablen im Interesse eines möglichst geringen Rechenaufwandes überflüssig sein sollten. Nach Ansicht des Verfassers werden diese Anforderungen von den später zur Diskussion zu stellenden itarativen Suchverfahren weitgehend erfüllt.

2 Die Planung des Produktionsprogramms

a Die Problemstellung

"Gegeben ist ein Unternehmen ..., das in einer Zeitperiode n Erzeugnisse (Erzeugnisarten) mit Hilfe von m produktiven Faktoren (...) herstellt. Die Aufgabe ... besteht darin zu bestimmen, welche Mengen von jeder Erzeugnisart hergestellt werden müssen, damit der Gesamtgewinn der Planungsperiode so groß wie möglich wird."[1] "Für die Herstellung der Erzeugnisse stehen nur begrenzte Mengen an Produktionsfaktoren zur Verfügung."[2] Dieses Problem kann wie folgt modellmäßig formuliert werden:

Zunächst ist der Tatsache Rechnung zu tragen, daß im allgemeinen Fall bei alternativen Absatzmengen mit unterschiedlichen Absatzpreisen zu rechnen ist. Die Möglichkeit einer aktiven Preis-Mengen-Politik kann modellmäßig mittels einer Preis-Absatzfunktion erfaßt werden. Dabei muß nicht unbedingt an eine

1 E. Gutenberg, Grundlagen..., Erster Band, a.a.O., S. 150. - Aus Gründen einheitlicher Indizierung wird im folgenden - abweichend von dem Zitat - die Anzahl der Erzeugnisse mit M und die Anzahl der Faktoren mit N bezeichnet.

2 Ebenda, S. 151.

stetige Funktion der Form $p = A - Bx$ sondern an irgendeine in der Vorstellung des Entscheidungsträgers existierende Zuordnung von alternativen Absatzpreisen und -mengen gedacht werden. Diese kann z.B. die Form einer nur wenige Alternativen umfassenden Wertetabelle, einer abschnittsweise stetigen Funktion oder die folgende, hier unterstellte Form haben:

$$(25) \qquad p_m = A_m + \sum_{m'=1}^{M} B_{mm'} x_{m'}$$

Darin bezeichnet p den Absatzpreis, x die Absatzmenge. A und B sind konstante Koeffizienten, m ein Erzeugnisartenindex und m' ein Hilfsindex zu m. Die Absatzmengen x_m seien, da es sich um eine einperiodige Betrachtung handelt, identisch mit den Produktionsmengen. Die Koeffizienten $B_{mm'}$ (für $m \neq m'$) können positiv, negativ oder gleich Null sein, je nachdem, ob es sich um substitutionale, komplementäre oder absatzmäßig unverbundene Güter handelt.[1] Auch der Fall konstanter Absatzpreise ist in dieser Form der Preis-Absatzfunktion mit $B_{mm'} = 0$ für alle m und m' als Spezialfall enthalten.

Auch die Faktorpreise können in ihrer Höhe von den Einsatzmengen (hier identisch mit Beschaffungsmengen gesetzt) abhängig sein. Sie können durch Rabattstaffeln, Zuschläge für Kleinaufträge oder auch

---

1 Zur allgemeinen Gestalt der Preis-Absatzfunktion siehe z.B. W. Ferner, Modelle zur Programmplanung im Absatzbereich industrieller Betriebe, Köln - Berlin - Bonn - München 1966, S. 130 f.; W. Krelle, Preistheorie, a.a.O., S. 229; H. Schultz, The Theory and Measurement of Demand, a.a.O., S. 576.

Knappheitssituationen variabel sein. Die Zuordnung von Produktionsfaktoren und Beschaffungspreisen[1] erfolgt in Gestalt einer Preis-Beschaffungsfunktion.[2] Dazu sei hier die folgende Form unterstellt:

$$(26) \quad q_n = Q_{ns} \text{ wenn } R_{ns} \leq r_n < R_{ns+1} \text{ für } \begin{matrix} n=1,\ldots,N \\ s=1,\ldots,S_n \end{matrix} .$$

Das heißt: Der Faktorpreis q_n eines jeden Faktors n hat das Niveau Q_{ns}, wenn die Faktormenge r_n der s-ten Rabattklasse entspricht, wobei die Rabattklasse s durch die Menge R_{ns} als Untergrenze und die Menge R_{ns+1} als Untergrenze der nachfolgenden Rabattklasse festgelegt ist. In dieser Preis-Beschaffungsfunktion sind die Fälle kontinuierlich variabler Beschaffungspreise (mit $R_{ns+1} - R_{ns} \rightarrow 0$ und $S_n \rightarrow \infty$ für alle n) und konstanter Beschaffungspreise (mit $Q_{ns} = Q_{ns+1}$ für $s=1\ldots S_n$) als Grenz- bzw. Spezialfall enthalten.

Schließlich sind als Grundlage für die Bestimmung der Kosten die Faktoreinsatzmengen zu erfassen. Diese sind pro Periode grundsätzlich abhängig von den Einsatzzeiten und Einsatzintensitäten der einzelnen Aggregate. Sie ergeben sich als Produkt der Faktoreinsatzfunktionen (die den Faktorverbrauch pro Zeiteinheit in Abhängigkeit von der Einsatzintensität des betreffenden Aggregats angeben) mit der Einsatzzeit des betreffenden Aggregats. Für die Faktoreinsatzfunktionen (Faktoreinsatzmengen der n-ten Faktorart beim l-ten Aggregat) sei als allgemein ein s-förmiger Verlauf unterstellt, so daß man schreiben kann

---

1 Im weiteren Sinne können dazu auch fiktive Beschaffungspreise wie z.B. nutzungsbedingte Abschreibungen gehören.

2 E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 157.

$$(27) \quad r_{1n} = \sum_{m=1}^{M} t_{1m}(C_{1mn}\bar{x}_1^3 + D_{1mn}\bar{x}_1^2 + E_{1mn}\bar{x}_1 + F_{1mn})$$ [1]

für 1=1...L; n=1...N.

Hierin ist selbstverständlich der Fall konstanter Produktionskoeffizienten (mit $C_{1mn}=D_{1mn}=F_{1mn}=0$) als Spezialfall enthalten.

Mit diesen Angaben kann die Zielfunktion als Differenz aus Erlösen und Kosten formuliert werden. Setzt man in die Definitionsgleichung des Gewinns

$$(28) \quad g = \sum_{m=1}^{M} p_m \cdot x_m - \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \sum_{l=1}^{L} q_n \cdot r_{lmn}$$

die Funktionen (25), (26) und (27) sowie die Produktions-Absatz-Mengengleichung

$$(29) \quad x_m = \sum_{l=1}^{L} \bar{x}_l \cdot t_{lm} \quad \text{für } m=1...M,$$

die besagt, daß die Summe der Produkte aus Einsatzzeit und -intensität über alle Aggregate gleich der Produktionsmenge (≙ Absatzmenge) ist, ein, so erhält man:

$$(30) \quad g = \sum_{m=1}^{M} \left\{ A_m \sum_{l=1}^{L} \bar{x}_l t_{lm} + \sum_{l=1}^{L} \bar{x}_l t_{lm} \sum_{m'=1}^{M} B_{mm'} \sum_{l=1}^{L} \bar{x}_l t_{lm'} \right\}$$

$$- \sum_{n=1}^{N} q_n \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} t_{lm}(C_{1mn}\bar{x}_1^3 + D_{1mn}\bar{x}_1^2 + E_{1mn}\bar{x}_1 + F_{1mn})$$

mit $q_n = Q_{ns}$ wenn

$$R_{ns} \leq \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} t_{lm}(C_{1mn}\bar{x}_1^3 + D_{1mn}\bar{x}_1^2 + E_{1mn}\bar{x}_1 + F_{1mn}) < R_{ns+1}.$$

---

1 Hierbei wird unterstellt, daß Intensitäts-Splitting nicht in Betracht kommt.

Diese Funktion gilt es zu maximieren. Dabei sind, in einem allgemeinen Modell, grundsätzlich Beschränkungen aller Variablen zu berücksichtigen (ob sie im konkreten Einzelfall wirksam werden, ist eine andere Frage). Es sei also davon ausgegangen, daß die Faktoreinsatzmengen durch Beschaffungsengpässe auf bestimmte Maximalmengen R_{nS_n}, die Einsatzintensitäten der Aggregate aufgrund technischer Bedingungen auf die Variationsbreite zwischen einer gegebenen Minimalintensität $\bar{X}_{1min}$ und einer gegebenen Maximalintensität $\bar{X}_{1max}$, die Ausbringungsmengen (z.B. durch Kontingentierung, Begrenztheit des Raumes für eine Reifelagerung, Trocknung oder dgl.) auf Maximalmengen X_m, die Einsatzzeiten durch natürliche, gesetzliche oder dispositive Gegebenheiten auf eine Maximalzeit T begrenzt sind. Ferner muß sichergestellt werden, daß die Lösung keine (ökonomisch sinnlosen) negativen Einsatzzeiten enthält. Es gilt also im allgemeinen Programmplanungsmodell folgender Satz von Nebenbedingungen:

$$(31)\quad \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} t_{lm}(C_{lmn}\bar{x}_l^3 + D_{lmn}\bar{x}_l^2 + E_{lmn}\bar{x}_l + F_{lmn}) \leq R_{nS_n}$$

für n=1...N

$$(32)\quad \bar{X}_{lmin} \leq \bar{x}_l \leq \bar{X}_{lmax} \qquad \text{für} \quad l = 1...L$$

$$(33)\quad \sum_{l=1}^{L} \bar{x}_l t_{lm} \leq X_m \qquad \text{für} \quad m = 1...M$$

$$(34)\quad \sum_{m=1}^{M} t_{lm} \leq T \qquad \text{für} \quad l = 1...L$$

$$(35)\quad t_{lm} \geq 0 \qquad \text{für} \quad l = 1...L \quad m = 1...M .$$

In diesem Satz von Nebenbedingungen sind natürlich die Fälle des praktischen Fehlens einiger Restriktionen (z.B. mit $X_1 \rightarrow \infty$) als Spezialfälle enthalten.

b Das "allgemeine" Produktionsmodell bei Gutenberg

Nach der oben ziertierten verbalen Problemstellung[1] formuliert Gutenberg das folgende "allgemeine" Produktionsmodell[2]:

$$(36) \quad g = \sum_{m=1}^{M} (P_m - \sum_{n=1}^{N} Q_n \cdot E_{mn}) \cdot x_m \rightarrow \max!$$

$$(37) \quad \sum_{m=1}^{M} E_{mn} x_m \leq R_n \qquad \text{für } n=1...N$$

$$(38) \quad x_m \geq 0 \qquad \text{für } m=1...M$$

Dabei ist E_{mn} der konstante Einsatzkoeffizient des n-ten Faktors für das m-te Produkt. Produkt- und Faktorpreise (P_m und Q_n) sind ebenfalls konstant, so daß sich in (36) der Gewinn als Summe der mit den Erzeugnismengen multiplizierten konstanten (Brutto-)Stückgewinne ergibt. Dieses Modell ist der linearen Programmierung ohne weiteres zugänglich.[3]

---

1 Siehe E. Gutenberg, Grundlagen..., Erster Band, a.a.O., S. 150f. und S. 140f. der vorliegenden Arbeit.

2 E. Gutenberg, Grundlagen..., Erster Band, a.a.O., S. 150-170. Die Schreibweise wurde den hier zuvor verwendeten Symbolen angepaßt.

3 Probleme dieser Form sind als "Standardmodell" der linearen Programmierung in fast allen Lehrbüchern zur Unternehmensforschung zu finden. Vgl. H. Meyhak, Simultane Gesamtplanung ..., a.a.O., S. 12. Als Beispiele siehe etwa H.C. Joksch, Lineares Programmieren, a.a.O., S. 3f.; S.I. Gass, Linear Programming, Methods and Applications, New York-Toronto-London 1958, S. 6; G.Hadley, Nichtlineare und dynamische Programmierung, a.a.O., S. 47; R. Henn - H.P. Künzi, Einführung in die

c Die Notwendigkeit allgemeiner Lösungsverfahren

In dem Spezialfall vom Unternehmer unbeeinflußbarer konstanter Absatzpreise P_m (m=1...M), Faktorpreise Q_n(n=1...N) und konstanter Produktionskoeffizienten E_{mn} stellt das der linearen Programmierung zugängliche Modell eine situationsgerechte Formulierung des Entscheidungsproblems dar. Da aber dieser Spezialfall in der Praxis nur sehr selten anzutreffen sein dürfte, würde man in den meisten konkreten Entscheidungssituationen bei Anwendung dieses Modells in der Wirtschaftlichkeitsrechnung von verfügbaren Struktur-Informationen abstrahieren und somit eine Lösung für eine Entscheidungssituation ermitteln, die in Wirklichkeit garnicht vorliegt.

Das unter a) konstruierte Modell ist dagegen besser geeignet,die empirische Situation adäquat zu erfassen. Da aber - von Spezialfällen abgesehen - die Zielfunktion dieses Modells nicht linear, nicht konkav, nicht separabel und nicht stetig und an allen Stellen differenzierbar ist und da ferner der Lösungsraum (wegen einiger nichtlinearer Nebenbedingungen)

Unternehmensforschung II, a.a.O., S. 9; H.M. Wagner. principles of Operations Research, a.a.O., S. 39; A. Vazsonyi, Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, a.a.O., S. 63 f.; C.W. Churchman - R.L. Ackoff - E.L. Arnoff, Introduction to Operations Research, New York - Lonson 1957, S. 305; M. Sasieni - A. Yaspan - L. Friedman, Methoden und Probleme der Unternehmensforschung ..., a.a.O., S. 226; M.J. Beckmann, Lineare Planungsrechnung, Linear Programming. Ludwigshafen a.Rh. 1959, S.25 f.; G.B. Dantzig, Maximization of a Linear Function of Variables subject to Linear Inequalities, in: T.C. Koopmans (Hrsg.), Activity Analysis of Production and Allocation, Proceedings of a Conference, New York - London 191, S. 339 - 347, hier S. 339; die Liste könnte beliebig verlängert werden.

nicht konvex ist, ist es einer Lösung mittels herkömmlicher Optimierungsverfahren nicht zugänglich.[1] Wieder ergibt sich also die Notwendigkeit der Suche nach einem Verfahren der Wirtschaftlichkeitsrechnung, das weniger einschränkenden Anwendungsvoraussetzungen unterworfen ist.

3 Produktionsplanung bei im Zeitablauf wechselnden Marktverhältnissen

a Die Problemstellung

Als drittes Beispiel sei ein Modell entwickelt, das das Problem der Produktionsplanung bei im Zeitablauf wechselnden Marktverhältnissen abbildet. Es kann sowohl als Erweiterung des oben skizzierten Modells zur Programmplanung als auch als Erweiterung des Modells zur optimalen Kombination der Verfahrenskomponenten des Produktionsprozesses aufgefaßt werden.

Erstens: Durch die Berücksichtigung im Zeitverlauf wechselnder Marktverhältnisse wird aus dem obigen Programmplanungsproblem bei stationärer bzw. einperiodiger Betrachtung ein "dynamisches" Problem bzw. das Programmplanungsproblem bei mehrperiodiger Betrachtung im evolutorischen Datenrahmen.

---

1 Vgl. E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 159. Gutenberg bestätigt die Wirklichkeitsfremdheit des Standardmodells und die mangelnde Eignung bekannter Optimierungsverfahren für die Lösung des umfassenden Problems.

Zweitens: Das in der Literatur so bezeichnete Problem der optimalen Kombination der Anpassungsarten ist - wie weiter oben bereits angedeutet - treffender als Problem der optimalen Kombination von Verfahrenskomponenten oder "Einsatzmerkmalen"[1] der maschinellen Aggregate zu bezeichnen. Denn es geht dabei um "Anpassung" an eine gegebene Ausbringungsmenge bzw. alternativ gegebene Ausbringungsmengen pro Periode. Anpassung ist aber ein Vorgang, der sich nur im Zeitablauf vollziehen kann; das Problem der optimalen Anpassung des Produktionsapparates kann also nicht bei einperiodiger bzw. stationärer Betrachtung auftreten (wenn sich nichts ändert, gibt es auch nichts anzupassen) sondern erst in einer mehrperiodigen Betrachtung bei im Zeitablauf wechselnden Marktverhältnissen.

In welcher Hinsicht die Problemstellung gegenüber den zuvor skizzierten Modellen erweitert ist, wird schon durch wenige einfache Überlegungen klar: Die optimale Konstellation der Verfahrenskomponenten in einer Periode ist hier nicht nur von den Daten dieser Periode sondern auch von denen der vorausgegangenen und nachfolgenden Periode abhängig. Die Hauptursache dafür ist darin zu sehen, daß Anpassungsmaßnahmen i.d.R. mit besonderen Kosten (Umstellungskosten, Produktionsveränderungskosten) verbunden sein werden. Diese können z.B. bewirken, daß der Produktionsapparat an eine kurzfristige Beschäftigungsspitze eher intensitätsmäßig angepaßt wird, während in Erwartung weiteren Aufschwungs der Absatzmarktlage etwa eine quantitative Anpassung vorgezogen wird. Besteht die Möglichkeit, die zeitliche Produktionsmengenverteilung durch Lagerhaltung

1 H. Koch, Das Gesetz vom abnehmenden Kapazitätszuwachs ..., a.a.O., S. 140.

von Absatzmarktschwankungen zu emanzipieren, so können Anpassungsmaßnahmen im Produktionsbereich und die damit verbundenen Umstellungskosten vermieden werden. Andererseits können starke Absatzschwankungen in Verbindung mit hohen Lagerkosten dazu führen, daß man durch Erhöhung des Betriebsmittelbestandes den Spielraum der Anpassung im Produktionsbereich erweitert.

Unter Bezeichnungen wie Produktionsplanung in Saisonunternehmen[1], Produktionsglättungsproblem, Production Smoothing and Inventory Control nimmt die mehr oder weniger ausschnittartige Behandlung dieses Problems breiten Raum in der Literatur ein. "Das Produktionsglättungsproblem wurde in den letzten 10 Jahren in der Unternehmensforschung so ausführlich wie kaum ein anderes Problem behandelt."[2]

In dieser Arbeit ist kein Raum, um auf die Vielzahl der in der Literatur behandelten Modelle im einzelnen einzugehen. Dazu möge hier der Verweis

---

1 Es leuchtet unmittelbar ein, daß allgemeinbegrifflich formulierte Lösungswege für dieses Problem, die im Hinblick auf Saisonschwankungen konzipiert wurden, prinzipiell auf Marktschwankungen beliebiger Frequenz und Planungszeiträume beliebiger Dauer ohne Schwierigkeiten übertragbar sind. Unterschiede mögen sich lediglich hinsichtlich der Sicherheit der Datenprognose (Genauigkeit der numerischen Informationen) und der zeitlichen Stabilität des Optimums ergeben. Dies aber steht hier nicht zur Debatte.

2 W. Piesch, die Lösungen einer Klasse von Produktionsglättungsmodellen, Band 9 der Schriftenreihe des Instituts für angewandte Wirtschaftsforschung Tübingen, Tübingen 1968, S. 139; Siehe auch F. Hanssmann, Operations Research in Production and Inventory Control, New York - London 1962, S. 113: "Of any single dynamic problem, the so-called production smoothing problem has received the most attention in the literature."

auf die von Piesch gegebene Übersicht[1] und die dort angegebene Literatur[2] genügen. Es sei vielmehr versucht, ein Modell zu konstruieren, daß möglichst viele Struktur-Informationen zu dem genannten Problem erfaßt.[3]

Gegeben sei eine mehrstufige Mehrproduktunternehmung, die sich im Verlauf eines in eine gegebene Anzahl von Perioden unterteilten Planungszeitraumes wechselnden Marktverhältnissen gegenübersieht. Im einzelnen sollen die folgenden Anpassungsmöglichkeiten in der Planung berücksichtigt werden:

Anpassung im Absatzbereich: Die Unternehmung prognostiziert für die einzelnen Perioden eines Planungszeitraumes von gegebener Ausdehnung je eine Preis-Absatz-Funktion, in denen die wechselnden Marktverhältnisse zum Ausdruck kommen. Daraus ergibt sich das Problem der optimalen zeitlichen Preisdifferenzierung[4] zur Glättung der Zeit-Absatz-Funktion[5]. Wegen der Erlös-Einbußen, die mit der

---

1 W. Piesch, Die Lösungen einer Klasse von Produktionsglättungsmodellen, a.a.O.

2 Ebenda S. 149 - 168.

3 Nach der Klassifizierung von Piesch handelt es sich um ein Modell zweiter Ordnung vom Typ dd111, ein diskretes deterministisches Modell mit Lagerhaltungskosten, Produktionskosten und Produktionsänderungskosten. Siehe W. Piesch, Die Lösungen einer Klasse von Produktionsglättungsmodellen, a.a.O., S. 6 - 8.

4 E. Gutenberg, Grundlagen ..., Zweiter Band, a.a.O., S. 341 f.; Th. Reichmann, Die Abstimmung von Produktion und Lager ..., a.a.O., S. 35.

5 W. Dinkelbach, Zum Problem der Produktionsplanung in Ein- und Mehrproduktunternehmen, Einzelschrift Nr. 4 von A. Adam (Hrsg.), Unternehmensforschung für die Wirtschaftspraxis, Würzburg - Wien 1964, S. 27; M. Seitz, Probleme der betrieblichen Planung ..., a.a.O., S. 32.

Glättung der Zeit-Absatz-Funktion verbunden sein können, ist es klar, daß dieses Problem nur im Zusammenhang mit der Produktionsplanung unter Abwägung gegen die dort möglichen Einsparungen an Lagerkosten und Produktionsänderungskosten in optimaler Weise gelöst werden kann. - Andere Möglichkeiten des absatzpolitischen Instrumentariums wie z.B. antizyklische Werbung, Fehlmengenplanung usw.[1] seien hier nicht berücksichtigt. Ihre zusätzliche Erfassung würde keinen Einfluß auf die Beurteilung der Lösungsmöglichkeiten haben.

Anpassung im Produktionsbereich: Die für die Erstellung des zu planenden Produktionsprogramms in Betracht kommenden Aggregate können zeitlich und intensitätsmäßig angepaßt werden. Die zeitliche Anpassung komme sowohl durch die Variation der Dauer einzelner Arbeitsschichten als auch durch die Variation der Anzahl der in einer Periode zu verfahrenden Schichten in Betracht. Im Gegensatz zu den zuvor behandelten Modellen sei hier neben dem Fall B auch der Fall A der quantitativen Anpassung[2] zugelassen. Und zwar soll, von einem gegebenen Betriebsmittelbestand ausgehend, bei Ausdehnung des Ausbringungsvolumens neben der Inbetriebnahme von vorhandenen, in Reserve gehaltenen

---

1 Th. Reichmann, Die Abstimmung von Produktion und Lager ..., a.a.O., S. 35 f.; M. Brunner, Planung in Saisonunternehmungen. Zeitliche Abstimmung zwischen Fertigungs- und Absatzvolumen bei saisonalen Absatzschwankungen, Band 16 von E. Gutenberg - W. Hasenack - K. Hax - E. Schäfer (Hrsg.), Beiträge zur betriebswirtschaftlichen Forschung, Köln - Opladen 1962, S. 97.

2 E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 368. Der Fall A bezeichnet den Zu- bzw. Verkauf von Aggregaten, der Fall B die Inbetriebnahme bzw. Stillegung von zuvor bzw. anschließend in Bereitschaft gehaltenen Aggregaten.

Aggregaten auch die Anschaffung zusätzlicher Aggregate erwogen werden,[1] während bei rückläufiger Beschäftigung an einen Verkauf nicht benötigter Aggregate (z.B. weil sich keine Abnehmer finden würden) nicht gedacht sei. Damit wird das Problem der optimalen Abstimmung der Kapazität[2] auf die Marktentwicklung erfaßt.

Die Stillegung und Inbetriebnahme von Aggregaten sei mit besonderen Kosten verbunden. Ferner seien bei in Reserve gehaltenen Aggregaten bestimmte Wartungs- und Erhaltungsarbeiten erforderlich, so daß besondere Stillstandskosten zu berücksichtigen sind.

Der Zukauf von neuen Aggregaten bewirke einen sprunghaften Anstieg der beschäftigungsfixen Kosten [3] für die betreffende und alle nachfolgenden Perioden des Planungszeitraumes.

---

1 Art und Anzahl der Aggregate, deren Anschaffung erwogen wird, seien gegeben.

2 Bei Brunner z.B. steht dieser Problemkreis im Vordergrund. M. Brunner, Planung in Saisonunternehmungen ..., a.a.O.

3 Hier wird in erster Linie an Abschreibungen, Mieten u. dgl. gedacht. Bei längeren Planungszeiträumen (mehrere Jahre) kann es aber auch sinnvoll sein, die vollen Anschaffungsausgaben im Zeitpunkt ihres tatsächlichen Anfalls als eine besondere Kategorie von "Kosten der Inbetriebnahme" zu erfassen. Die Frage aber, ob mit periodisierten Kosten oder mit Auszahlungen im Zeitpunkt ihres Anfallens zu rechnen sei, steht hier nicht zur Debatte; dies wäre eine Frage der richtigen Bildung des Optimalitätskriteriums; siehe dazu H. Koch, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 89 - 115.

Bei der zeitlichen Anpassung innerhalb einer Arbeitsschicht seien während einer gegebenen Normalarbeitszeit teils zeitproportionale teils ausbringungsproportionale Löhne zu zahlen, deren Beträge eine gewisse garantierte Mindestlohnsumme nicht unterschreiten dürfen. Für Überstundenarbeit sei eine bestimmte proportionale Erhöhung beider Lohnkomponenten vorgesehen. Ferner werden einige Arbeitskräfte durch ein festes Periodengehalt entlohnt.

Die zeitliche Anpassung mit der Anzahl der pro Periode zu fahrenden Schichten erfordert eine Änderung der Anzahl der Beschäftigten.[1] Mit der Einstellung (Entlassung) von Arbeitskräften seien bestimmte Einstellungs-(Entlassungs-)kosten (z.B. für medizinische Untersuchungen, Verwaltungsarbeiten, unproduktive Lohnkosten während einer Einweisungszeit und dgl.) verbunden. Bei Nachtschichten sei ein fester Nacharbeitszuschlag pro Arbeitskraft zu zahlen.

Die Kostenabhängigkeit von der Einsatzintensität der einzelnen Aggregate sei festgelegt durch konstante Faktorpreise und nach Maßgabe gegebener Verbrauchsfunktionen, die auch für den Rohstoffeinsatz, nicht

---

1 Die zeitliche Anpassung mit der Schichtzahl könnte daher auch als quantitative Anpassung des Faktors Arbeit bezeichnet werden. Allerdings widerspricht der Bezug auf die einzelnen produktiven Faktoren bei der Bezeichnung der Anpassungsarten (vgl. hierzu G. Laßmann, Die Produktionsfunktion ..., a.a.O., Fußnote 55 zu S. 28) der Konzeption Gutenbergs, auf den ja die heute übliche Unterscheidung der Anpassungsarten zurückgeht. Gutenberg stellt eindeutig auf das Verhalten der maschinellen Aggregate ab, so daß die Anpassung mit der Schichtzahl als besondere Form der zeitlichen Anpassung aufzufassen ist. (Vgl. E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 343 ff.).

aber für den ruhenden Verschleiß der Aggregate und den Einsatz des Faktors Arbeit definiert seien.[1]

Als alternative Einsatzintensitäten mögen nur eine für jedes Aggregat gegebene Anzahl von Intensitätsstufen in Frage kommen. Dies kann technisch oder organisatorisch bedingt sein. Zur technischen Begrenzung des Variationsspielraumes für die Aggregat-Einsatzintensitäten denke man z.B. an die Intensitätsvariation durch Einlegen verschiedener Gänge eines Schaltgetriebes oder durch Umrüsten wie Einbau anderer Übersetzungen u.dgl. Andererseits kann der Fall eintreten, daß trotz eventuell technisch möglicher kontinuierlicher Intensitätsvariationen in der Planung nur diskrete Intensitätsstufen berücksichtigt werden, etwa weil die Unternehmung "auf Grund von technischen und kostenrechnerischen Unterlagen [nur über] Daten über diskrete zu realisierende Intensitätsstufen eines Aggregates mit zugehörigen Kostenwerten"[2] verfügt.

---

1 Der Rohstoffeinsatz kann, ebenso wie der Verbrauch aller anderen Einsatzfaktoren, von der Einsatzintensität des Aggregates abhängig sein. Man denke etwa an erhöhten Ausschuß oder geringere Materialausnutzung bei erhöhter Einsatzintensität. Vgl. W. Kilger, Produktions- und Kostentheorie, a.a.O., S. 60. - Der ruhende Verschleiß sei in seinen kostenmäßigen Auswirkungen im Block der beschäftigungsfixen Kosten erfaßt. Für die Lohnkosten wird hier eine besondere Beziehung zwischen Ausbringung, Arbeitszeit und Anzahl der Arbeitskräfte hergestellt. Die Anzahl der Arbeitskräfte sei dabei lediglich von der Anzahl der Aggregate und Schichten, nicht aber von der Einsatzintensität abhängig.

2 K. Dellmann - L. Nastansky, Kostenminimale Produktionsplanung bei rein-intensitätsmäßiger Anpassung mit differenzierten Intensitätsgraden, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 39. Jg., 1969, S. 239 - 268, hier S. 245.

Produktionsveränderungskosten können u.a. durch Umrüstvorgänge und/oder dadurch auftreten, daß die Veränderung der Intensität einen nachteiligen Einfluß auf die z-Situation[1] (die technischen Eigenschaften, die den Faktorverbrauch maßgeblich beeinflussen) des betroffenen Aggregates haben, so daß seine Kostenfunktion in Abhängigkeit von der jeweiligen Intensität in der Periode, in der die Veränderung erfolgt, und in allen nachfolgenden Perioden nach oben verschoben wird.[2] Dabei ist auch die Dauer der Abweichungen von der technisch optimalen Intensität (die mit der kostenminimalen Intensität nicht identisch sein muß[3]) und ihren Einfluß auf den Verschleiß und damit auf die z-Situation bzw. die Kostenfunktion in den nachfolgenden Perioden zu berücksichtigen.

Anpassung im Lagerbereich: Diskrepanzen zwischen den periodischen Absatz- und Produktionsmengen können durch Lagerhaltung aufgefangen werden. Damit sind auch Lagerhaltungskosten, im einzelnen mengenproportionale Ein- und Auslagerungskosten sowie zeit- und mengenproportionale Lagerungskosten zu berücksichtigen.

---

1 E. Gutenberg, Grundlagen ..., Erster Band, a.a.O., S. 317 f.

2 Z.B. kann im Kokereibetrieb ein Unterschreiten der optimalen Garungszeit durch Temperaturerhöhung (Überschreiten der optimalen Intensität) zu Schäden an der Ofenanlage führen. Vgl. E. Heinen, Anpassungsprozesse und ihre kostenmäßigen Konsequenzen, dargestellt am Beispiel des Kokereibetriebes, Köln - Opladen 1957, S. 108.

3 So kann es unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten z.B. zweckmäßig sein, zwecks Einsparung von Kraftstoff bei einem Verbrennungsmotor erhöhten Verschleiß in Kauf zu nehmen.

b Konstruktion eines mathematisch-formalen Modells

(1) Die Variablen

Bevor die vorstehenden verbalen Angaben in mathematisch-formaler Weise erfaßt werden können, ist zu klären, welches die unabhängigen Variablen des Problems sein sollen. Dazu gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten.

Die erste besteht darin, daß man alle durch Dispositionen beeinflußbaren Größen des Problems (originäre Variable) als formal unabhängige Entscheidungsvariable explicite in das Entscheidungsmodell aufnimmt; etwa bestehende Abhängigkeiten zwischen einzelnen Variablen sind dann in Form von Nebenbedingungen zu berücksichtigen. Die zweite Möglichkeit besteht darin, daß alle voneinander abhängigen Variablen durch wenige repräsentative Variable ausgedrückt werden.

An einem einfachen Beispiel seien diese beiden Möglichkeiten verdeutlicht: Es seien Ausbringungsmenge x, Einsatzzeit t und Intensität $\bar{x}$ festzulegen. Nach der ersten Möglichkeit wäre dies in der folgenden Weise zu formalisieren:

$$(39) \qquad g = f(x, \bar{x}, t) \longrightarrow \max$$

unter Einhaltung der Kontinuitätsbedingung[1] (hier Identitätsgleichung)

$$(40) \qquad x = \bar{x} \cdot t.$$

---

1 Zu der Bezeichnung siehe H. Jacob, Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 34. Jg., 1964, Teil I: S. 487 - 507, Teil II: S. 551 - 594, hier S. 560.

Nach der zweiten Möglichkeit würde dasselbe Problem lauten:

$$(41) \quad g = f(\bar{x} \cdot t, \bar{x}, t),$$

wobei keine besondere Nebenbedingung erforderlich ist.

Sofern nicht Rücksichten auf die Anwendungsvoraussetzungen des ins Auge gefaßten Rechenverfahrens anderes erfordern, ist die zweite Möglichkeit stets vorzuziehen; denn die Inanspruchnahme von Rechenzeit und Speicherkapazität eines elektronischen Rechenautomaten ist - was unmittelbar einleuchtend erscheint - ceteris paribus umso geringer, je kleiner die Anzahl der zu verarbeitenden Variablen und Nebenbedingungen ist.

Zwischen den originären Variablen des hier zu formalisierenden Problems bestehen nun verschiedene, mehr oder weniger offensichtliche, limitationale Abhängigkeiten. Aufgrund technischer Bedingungen besteht z.B. eine eindeutige Abhängigkeit zwischen der Anzahl der in einer Schicht eingesetzten Aggregate eines bestimmten Typs und der Anzahl der Arbeitskräfte, die zur Bedienung dieser Aggregate in dieser Schicht erforderlich sind. Aufgrund vertraglicher Abmachungen sind die Löhne[1] eine Funktion

---

1 Manchem Leser mag die Aufführung von Kosten unter den unternehmerischen Teilhandlungen entsprechenden Variablen etwas befremdlich anmuten. Die Erklärung ist in der pagatorischen Fassung des Kostenbegriffs zu finden, wonach Kosten eine unternehmerische Teilhandlung (der Akt der Entgeltzahlung) bedeuten. Vgl. H. Koch, Zur Kontroverse: "wertmäßiger" - "pagatorischer" Kostenbegriff , in: H. Koch, Grundprobleme der Kostenrechnung, Köln-- Opladen 1966, S. 48 - 62, hier S. 51.

von Arbeitszeit und/oder Arbeitsleistung der eingesetzten Arbeitskräfte. Aufgrund von gesetzlichen Bestimmungen besteht eine Abhängigkeit zwischen den Überstundenzuschlägen einerseits und den Normallöhnen und der Überstunden-Arbeitszeit andererseits.[1] Aufgrund bestimmter Marktverhältnisse besteht (obgleich vielleicht nur in der Vorstellung des Unternehmers) eine strenge Beziehung zwischen Absatzpreisen und Absatzmengen.[2] Aufgrund logischer Bedingungen besteht eine strenge Abhängigkeit der Lagerbestandentwicklung vom Produktions- und Absatzplan. Aufgrund der Definition der Einsatzintensität gilt die Identität von Erzeugnismenge und mathematischem Produkt aus Einsatzintensität und Einsatzzeit eines Aggregates. Aufgrund verrechnungstechnischer Konvention besteht ein Zusammenhang zwischen Art und Anzahl der im Betrieb vorhandenen Aggregate und den beschäftigungsfixen Kosten. Generelle Vorentscheidungen können eine feste Beziehung zwischen Art und Anzahl der in Reserve gehaltenen Aggregate und den Stillstandskosten konstituieren. - Die Kette der Beispiele für solche Beziehungen könnte beliebig fortgesetzt werden.

Jedenfalls ermöglichen es diese Beziehungen, die zweite der oben genannten Möglichkeiten zur Formalisierung des Problems zu wählen, indem nur wenige Variable explicite in das Modell aufgenommen werden, die übrigen Variablen und die entsprechenden Nebenbedingungen aber nach Maßgabe dieser Beziehungen durch jene ausgedrückt werden.

---

1 R. Schneider, Wirkungen der Arbeitszeit auf Produktion, Ertrag und Kosten. Ein Beitrag zur Theorie der zeitlichen Anpassung, Stuttgart 1964, S. 162.

2 Die Problematik mehrwertiger Datenvorstellungen sei hier, wie überall in dieser Arbeit, ausgeklammert.

Konkret bedeutet das in dem hier behandelten Problem, daß nur die nachfolgend aufgeführten Variablen explicite zu optimieren sind und die optimalen Niveaus der übrigen Variablen mit Hilfe der (unten noch zu spezifizierenden) Beziehungen alsdann rekursiv zu bestimmen sind. Als unabhängige Variable[1] des hier zu formulierenden Modells werden nun ausgewählt:

p_{im} für i=1...I, m=1...M,

der in der i-ten Periode für die m-te Produktart geltende Absatzpreis,

$t_{ijl_k m}$ für i=1...I, j=1...J, l_k=1...L_k,
k=1...K, m=1...M,

die Einsatzzeit des l-ten Aggregates[2] in der k-ten Fertigungsstufe in der j-ten Schicht der i-ten Periode für die m-te Produktart,

$\bar{x}_{ijl_k m}$ für i=1...I, j=1...J, l_k=1...L_k,
k=1...K, m=1...M,

die Einsatzintensität des l-ten Aggregates in der k-ten Fertigungsstufe in der j-ten Schicht der i-ten Periode zur Erstellung der m-ten Produktart.

Mit diesen Variablen läßt sich das Modell wie folgt formulieren:

---

1 Wegen der Vielfalt der hier zu berücksichtigenden Größen sei für ihre Symbolisierung folgende Konvention eingeführt: Kleine lateinische Buchstaben bezeichnen Variable (auch veränderliche Indizes). Große lateinische Buchstaben bezeichnen Konstante (auch Laufgrenzen von Indizes). Griechische Buchstaben bezeichnen Funktionen, deren konkrete Gestalten im Einzelfall (im Zuge der Datenermittlung) festzustellen sind.

2 Es handele sich ausschließlich um Einzweckaggregate, die in jeder Fertigungsstufe über alle Typen durchnumeriert seien.

(2) Die Komponenten der Zielfunktion

(a) Erlöse

Der Erlös für ein Erzeugnis in einer Periode ist gleich dem mathematischen Produkt aus Absatzpreis und Absatzmenge der Periode. Die Absatzmenge ist, so sei unterstellt,nach Maßgabe von Absatzfunktionen $x = \alpha(p)$ vom Absatzpreis abhängig. Der Gesamterlös e des Planungszeitraumes ist trivialerweise gleich der Summe aller Periodenerlöse aller Produkte. Das erste Glied der Zielfunktion lautet also

$$(42) \qquad e = \sum_{i=1}^{I} \sum_{m=1}^{M} p_{im} \cdot \alpha_{im}(p_{im}).$$

(b) Aggregat - Betriebskosten.

Die Höhe der mit der jeweiligen Einsatzweise der Aggregate l_k vereinbaren Betriebskosten (einschließlich Rohstoffkosten in der ersten Fertigungsstufe) k^B errechnet sich als Produkt aus den nach Maßgabe der Verbrauchsfunktionen $\varphi_{l_k n}(\bar{x}_{ijl_k m}, z_{l_k 1 m}, \ldots, z_{l_k P m})$[1] und den entsprechenden Faktorpreisen Q_n, die ihrerseits wiederum eine Funktion der Faktoreinsatzmengen sein können.[2] Das zweite Glied der Zielfunktion lautet also

$$(43) \quad k^B = \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_k=1}^{L_k} t_{ijl_k m} \cdot \sum_{n=1}^{N} Q_n \varphi_{l_k n}(\bar{x}_{ijl_k m}, z_{ijl_k 1}, \ldots, z_{ijl_k P})$$

1 Der Index n (=1...N) bezeichnet dabei die Faktorarten und der Index p (=1...P) die technischen Eigenschaften.

2 Aus Vereinfachungsgründen seien die Preis-Beschaffungsfunktionen nicht explizit angegeben sondern lediglich durch das Faktorpeis-Symbol Q_n bezeichnet.

wobei die technischen Eigenschaften der Aggregate $z_{1_k p}$ wegen der Abhängigkeit der z-Situation von Häufigkeit, Dauer und Ausmaß von Intensitätsvariationen als Funktionen der Einsatzzeiten und Einsatzintensitäten der vorausgegangenen Schichten zu erfassen sind:

$$(44)\quad z_{ij1_kp} = \zeta(t_{111_k1}, t_{i,j-1,1_kM}, \bar{x}_{111_k1}, \ldots, \bar{x}_{i,j-1,1_kM})$$

für $j > 1$

bzw., da der Ausdruck t_{i01_km} nicht definiert ist,

$$z_{ij1_kp} = \zeta(t_{111_k1} \ldots t_{i-1,J1_kM}, \bar{x}_{111_k1} \ldots \bar{x}_{i-1,J1_kM})$$

für $j = 1$.

(c) Beschäftigungsfixe Aggregatkosten

Da die Anzahl der im Betrieb vorhandenen Aggregate variabel ist, handelt es sich auch bei den beschäftigungsfixen Aggregatkosten (Bereitschaftskosten) um eine disponible Größe, die in die Zielfunktion aufzunehmen ist. Die Höhe der beschäftigungsfixen Kosten eines Aggregates ist gleich dem Produkt aus den beschäftigungsfixen Kosten pro Periode $K^F_{1_k}$ und der Anzahl der Perioden, während derer das Aggregat im Betrieb vorhanden ist. Diese Differenz ist gleich der Anzahl I aller Perioden des Planungszeitraumes und der Anzahl i_{1_k} der Perioden, während derer die Summe der Betriebszeiten des Aggregates über alle Schichten gleich Null ist. Bezeichnet man die zu Beginn des Planungszeitraumes im Betrieb vorhandenen Aggregate mit den Indizes $1_k = 1 \ldots 1'_k$ und die Aggregate, deren Anschaffung erwogen wird, mit den Indizes $1_k = 1'_k+1, \ldots, L_k$, so kann man definieren:

$$(45)\quad i_{l_k} = \begin{cases} 0 \text{ für } l_k \neq l'_k \\ \max\limits_{i=1\ldots I} \left(i / \sum\limits_{i=1}^{i} \sum\limits_{j=1}^{J} \sum\limits_{m=1}^{M} t_{i'jl_km} = 0\right) \text{ für } l_k\ l_{k'} \end{cases}$$

Die Zahl i_{l_k} gibt dann für alle Aggregate die Anzahl der Perioden an, in denen sie nicht im Betrieb vorhanden sind; das ist bei den eventuell anzuschaffenden Aggregaten die Anzahl der Perioden, für die die Summe der Betriebszeiten gleich Null ist, denn man kann davon ausgehen, daß kein Aggregat angeschafft wird, ohne sogleich eingesetzt zu werden. Die Anzahl der Perioden, während derer ein Aggregat l_k im Betrieb vorhanden ist, ist dann $I-i_{l_k}$, und die Summe der beschäftigungsfixen Aggregatkosten, das dritte Glied der Zielfunktion, lautet

$$(46)\quad k^F = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_k=1}^{L_k} K^F_{l_k} \cdot (I - i_{l_k}).$$

(d) Aggregat - Stillstandkosten

Durch die Möglichkeit der quantitativen Anpassung, Fall B sind auch die Stillstandskosten der Aggregate disponibel und deshalb in der Zielfunktion zu erfassen. Der Stillstandskostenbetrag $K^S_{l_k}$ für jedes Aggregat kann positiv oder negativ sein. Er ist positiv, wenn bei Aggregatstillstand zusätzliche Wartungs- und Erhaltungsarbeiten anfallen; er ist negativ, wenn ein Teil der bei Aggregatbetrieb anfallenden beschäftigungsfixen Aggregatkosten (Bereitschaftskosten) bei Stillstand eingespart werden kann. Er fällt in allen Perioden an, in denen die Summe der Betriebszeiten eines Aggregates über alle Schichten

gleich Null ist. Unter Verwendung der oben definierten Zahl i_{1_k} ist das vierte Glied der Zielfunktion zu schreiben als

$$(47)\quad k^S = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_k=1}^{L_k} \sum_{i=i_{1_k}+1}^{I} \left[K^S_{1_k} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ wenn } \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} t_{ijl_k m} \begin{Bmatrix} = \\ > \end{Bmatrix} 0 \right]^{1} .$$

(e) Aggregat - Inbetriebnahmekosten

Aggregat-Inbetriebnahmekosten fallen immer dann an, wenn die Betriebszeit eines Aggregates in einer Periode größer als Null und in der vorausgegangenen Periode gleich Null ist. Das fünfte Glied der Zielfunktion lautet demgemäß

$$(48)\quad k^{S+} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_k=1}^{L_k} \sum_{i=i_{1_k}+1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \left[K^{S+}_{1_k} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ wenn } \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} t_{ijl_k m} - \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} t_{i-1,jl_k m} \begin{Bmatrix} > 0 \\ \neq 0 \\ = 0 \end{Bmatrix} \right]^{2}$$

---

1 Bei dem dritten Summenzeichen kann der Fall eintreten, daß die Summationsuntergrenze größer ist als die Summationsobergrenze ($i_{1_k}+1 > I$); das gilt für diejenigen Aggregate, die in das Kalkül aufgenommen werden, aber gar nicht angeschafft werden. Hierzu ist darauf hinzuweisen, daß konventionsgemäß gilt:

$$\sum_{i=A}^{B} x_i = 0 \quad \text{wenn } A > B$$

Vgl. W. Wetzel - H. Skarabis - P. Naeve, Mathematische Propädeutik für Wirtschaftswissenschaftler, I. Lineare Algebra, Berlin 1968, S. 87.

2 Siehe S. 130.

(f) Aggregat - Stillegungskosten

In entsprechender Weise ist das sechste, die Stilllegungskosten erfassende Glied der Zielfunktion zu schreiben als

$$(49)\quad k^{S-} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_k=1}^{L_k} \sum_{i=i_{l_k}+1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \left[k^{S-}_{l_k} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right. \quad \text{wenn}$$

$$\left. \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} t_{i-1,jl_km} - \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} t_{ijl_km} \begin{cases} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} t_{i-1,jl_km} > 0 \\ \neq \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} t_{i-1,jl_km} \\ = 0 \end{cases} \right]$$

(g) Aggregat-Anschaffungskosten.

Wird eines der Aggregate $l_k > l'_k$ angeschafft, ist also $i_{l_k} < I$, so fallen einmalig im Planungszeitraum besondere Anschaffungskosten $K^A_{l_k}$ an. In diesem Betrag sind die nicht aktivierten, also nicht unter den beschäftigungsfixen Aggregatkosten berücksichtigten Anschaffungsnebenkosten, soweit sie die üblichen Inbetriebnahmekosten übersteigen, zu erfassen. Das siebente Glied der Zielfunktion lautet also

$$(50)\quad k^A = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_k=l'_k+1}^{L_k} \left[K^A_{l_k} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ wenn } i_{l_k} \begin{Bmatrix} < \\ = \end{Bmatrix} I \right].$$

---

2 Dadurch, daß bei dem dritten Summenzeichen $i=i_{l_k}+1$ statt $i=1$ als Summationsuntergrenze angegeben wird, kann u.U. der Rechenaufwand zur Ermittlung des Zielfunktionswertes für eine bestimmte Niveaukombination der Variablen geringfügig reduziert werden. Die gleiche Vereinfachung kann übrigens bei allen Summationen von aggregatbezogenen Größen über i angebracht werden.

(h) Gehaltskosten

Die Höhe der Gehälter ist nur abhängig von Art und Anzahl der mit festem Periodengehalt entlohnten Arbeitskräfte (z. B. Meister, Vorarbeiter und dgl.). Die Anzahl a_q der Arbeitskräfte der Qualifikationsart q, die ein festes Periodenentgelt in Höhe von G_q beziehen, ist - so sei hier der Einfachheit halber angenommen - stufenweise abhängig von der Anzahl der in den einzelnen Fertigungsstufen und Schichten geleisteten Aggregat-Betriebsstunden, so daß die Gehaltsfunktion beschrieben werden kann als

$$(51) \quad k^G = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{q=1}^{Q} a_{ijkq} \cdot G_q \quad \text{mit}$$

$$(51a) \quad a_{ijkq} = A_{ijkqr_k}, \text{ wenn } T_{ijkr_k-1} < \sum_{m=1}^{M} \sum_{l_k=1}^{L_k} t_{ijl_km} \leq T_{ijkr_k}, \text{ wobei } r_k = 1 \ldots R_k \text{ und } T_{ijk0} = 0.$$

Darin bedeutet A_{ijkqr_k} diejenige Anzahl von Gehaltsempfängern der Qualifikationsart q, die in der j-ten Schicht der i-ten Periode in der k-ten Fertigungsstufe einzusetzen ist, wenn die Anzahl von Maschinenstunden in der entsprechenden Schicht in r_k-ten durch Unter- und Obergrenzen T_{ijkr_k-1} bzw. T_{ijkr_k} definierten Intervall liegt.

(i) Zeitlöhne

Für den Einsatz von im Zeitlohn bezahlten Arbeitern sei ein bestimmter Mindestlohn vereinbart, so daß bei Unterschreitung einer bestimmten Einsatzzeit $T^1_{jl_k}$ den dort beschäftigten Arbeitern dennoch diese Zeit voll vergütet wird. Für das Intervall $0 < t_{ijl_km} \leq T^1_{jl_k}$ lautet also die Zeitlohnfunktion für ein Aggregat

$$(52) \quad l^Z_{ijl_k} = L^Z_{jl_k} \cdot T^1_{jl_k}$$

wobei $l^Z_{jl_k}$ die Lohnsumme pro Zeiteinheit für alle an dem Aggregat l_k beschäftigten Zeitlöhner bedeutet.

Für ein zweites Intervall $T^1_{jl_k} < \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} \leq T^2_{jl_k}$, wobei $T^2_{jl_k}$ die Normalarbeitszeit der j-ten Schicht am l_k-ten Aggregat bedeutet, gilt die Beziehung

$$(53) \quad l^Z_{ijl_k} = L^Z_{jl_k} \cdot \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} \quad .$$

Für das dritte und letzte Intervall[1] $T^2_{jl_k} < \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} \leq T^3_{jl_k}$, wobei $T^3_{jl_k}$ die höchstzulässige Arbeitszeit der j-ten Schicht am l_k-ten Aggregat bedeutet, gilt die Beziehung

$$(54) \quad l^Z_{ijl_k} = L^Z_{jl_k} \cdot \sum_{m=1}^{M} \left[t_{ijl_km} + \Theta \cdot (t_{ijl_km} - T^2_{jl_k}) \right] \quad .$$

Darin bezeichnet Θ den Überstundenzuschlagssatz als Dezimalbruch.

Zusammengefaßt lautet die Zeitlohnfunktion als neuntes Glied der Zielfunktion

$$(55) \quad l^Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_k=1}^{L_k} L^Z_{jl_k} \cdot \left\{ \begin{array}{l} T^1_{jl_k} \\ \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} \\ \sum_{m=1}^{M} (1+\Theta) t_{ijl_km} - \Theta T^2_{jl_k} \end{array} \right\}$$

$$\text{wenn} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} \leq T^1_{jl_k} \\ T^1_{jl_k} < \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} \leq T^2_{jl_k} \\ T^2_{jl_k} < \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} \leq T^3_{jl_k} \end{array} \right\} \quad .$$

---

1 Es kann u.U. noch ein viertes Intervall geben, dann nämlich, wenn der Überstundenzuschlagssatz nach der Dauer der Überstundenarbeitszeit gestaffelt ist.

(j) Akkordlöhne

Auch für die Akkordlohnfunktion sind die drei Intervalle mit Mindestvergütung, Normallohn und Überstundenlohn zu unterscheiden. Da die Obergrenzen des zweiten und dritten Intervalls nach der Arbeitszeit bemessen sind, andererseits aber die Lohnhöhe auf der Grundlage der Ausbringungsmenge $x=\bar{x}\cdot t$ berechnet wird, sind die Intervallbreiten in bezug auf die Lohnbemessungsgrundlage variabel.

Die Akkordlohnfunktion für eine Schicht an einem Aggregat lautet nun für das Intervall, in dem der garantierte Mindestlohn gezahlt wird,

$$0 < \sum_{m=1}^{M} \bar{x}_{ijl_k m} \cdot t_{ijl_k m} \leq X^1_{jl_k} :$$

$$(56) \qquad l^A_{ijl_k} = L^A_{jl_k} \cdot X^1_{jl_k} \quad .$$

In dem zweiten Intervall, dessen Untergrenze in bezug auf die Ausbringung fix, dessen Obergrenze aber in bezug auf die Ausbringung variabel ist,

$$X^1_{jl_k} < \sum_{m=1}^{M} \bar{x}_{ijl_k m} \cdot t_{ijl_k m} \; ; \; \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_k m} \leq T^2_{jl_k}$$

gilt die Funktion

$$(57) \qquad l^A_{ijl_k} = L^A_{jl_k} \cdot \sum_{m=1}^{M} \bar{x}_{ijl_k m} \cdot t_{ijl_k m} \quad .$$

Bei Überschreiten der Normalarbeitszeit schließlich, also in dem Intervall

$$T^2_{jl_k} < \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_k m} \leq T^3_{jl_k} \quad \text{mit der zusätzlichen Bedingung}$$

$$\sum_{m=1}^{M} \bar{x}_{ijl_k m} \cdot t_{ijl_k m} > X^1_{jl_k}, \text{ gilt:}$$

$$(58)\quad 1^{A}_{ijl_k} = L^{A}_{jl_k} \cdot \Big[\sum_{m=1}^{M} \bar{x}_{ijl_km} \cdot t_{ijl_km} + \ddot{U} \cdot \bar{x}_{ijl_km} \cdot \Big(\sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} - T^{2}_{jl_k} \Big) \Big] \quad .$$

Das zehnte Glied der Zielfunktion ist also die Akkordlohnfunktion für den Planungszeitraum in der Form

$$(59)\quad 1^{A} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_k=1}^{L_k} L^{A}_{jl_k} \cdot \cdot \begin{cases} X^{1}_{jl_k} \\ \sum_{m=1}^{M} \bar{x}_{ijl_km} \cdot t_{ijl_km} \\ \sum_{m=1}^{M} \Big[(1+\ddot{U}) \bar{x}_{ijl_km} t_{ijl_km} - \ddot{U} \bar{x}_{ijl_km} T^{2}_{jl_k} \Big] \end{cases} \text{wenn}$$

$$\begin{cases} 0 < \sum_{m=1}^{M} \bar{x}_{ijl_km} t_{ijl_km} \leq X^{1}_{jl_k} \\ X^{1}_{jl_k} < \sum_{m=1}^{M} \bar{x}_{ijl_km} t_{ijl_km}; \ \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} \leq T^{2}_{jl_k} \\ \sum_{m=1}^{M} \bar{x}_{ijl_km} t_{ijl_km} > X^{1}_{jl_k}; \ T^{2}_{jl_k} < \sum_{m=1}^{M} t_{jl_km} \leq T^{3}_{jl_k} \end{cases} \quad .$$

(k) Einstellungs- und Entlassungskosten

Bei der Erfassung der Einstellung- und Enlassungskosten ist zu unterscheiden zwischen denen für Gehaltsempfänger und denen für Lohnempfänger. Für die Anzahl der Gehaltsempfänger wurde oben unter (h) bereits eine Beziehung aufgestellt. Art und Anzahl der

Lohnempfänger seien an die Anzahl der in den einzelnen Schichten in Betrieb befindlichen Aggregate, das ist in jeder Periode die Anzahl der von Null verschiedenen Betriebszeiten $t_{ijl_k m}$. Einstellungen sind immer dann erforderlich, wenn $a_{ijkq} > a_{i-1,jkq}$ bzw. wenn für die einzelnen Aggregate und Schichten

$$\sum_{m=1}^{M} t_{ijl_k m} - \sum_{m=1}^{M} t_{i-1,jl_k m} = \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_k m} > 0;$$

Entlassungen sind immer dann erforderlich, wenn $a_{ijkq} < a_{i-1,jkq}$ bzw. wenn für die einzelnen Aggregate und Schichten

$$\sum_{m=1}^{M} t_{i-1,jl_k m} - \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_k m} = \sum_{m=1}^{M} t_{i-1,jl_k m} > 0.$$

Bezeichnet man die Einstellungskosten für einen Gehaltsempfänger der Qualifikationsart q mit K_q^{E+}, die Entlassungskosten für einen Gehaltsempfänger der Qualifikationsart q mit K_q^{E-} und die Einstellungskosten für eine Lohnempfänger-Belegschaft des Aggregates l_k mit $K_{l_k}^{E+}$ sowie die entsprechenden Entlassungskosten mit $K_{l_k}^{E-}$, so kann man die Einstellungs- und Entlassungskosten des Planungszeitraums als elftes Glied der Zielfunktion wie folgt erfassen:

$$(60)\quad k^E = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{q=1}^{Q} \begin{Bmatrix} K_q^{E+}(a_{ijkq} - a_{i-1,jkq}) \\ K_q^{E-}(a_{i-1,jkq} - a_{ijkq}) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{wenn} \quad \begin{Bmatrix} a_{ijkq} > a_{i-1,jkq} \\ a_{ijkq} < a_{i-1,jkq} \\ a_{ijkq} = a_{i-1,jkq} \end{Bmatrix}$$

(Fortsetzung der Formel S. 136!)

$$+ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_k=1}^{L_k} \begin{Bmatrix} K^{E+}_{l_k} \\ K^{E-}_{l_k} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ wenn}$$

$$\begin{Bmatrix} \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} - \sum_{m=1}^{M} t_{i-1,jl_km} = \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} > 0 \\ \sum_{m=1}^{M} t_{i-1,jl_km} - \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} = \sum_{m=1}^{M} t_{i-1,jl_km} > 0 \\ \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} = \sum_{m=1}^{M} t_{i-1,jl_km} \\ 0 < \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km} \neq \sum_{m=1}^{M} t_{i-1,jl_km} > 0 \end{Bmatrix} .$$

(1) Lagerungskosten

Die Lagerhaltungskosten für die Ausbringung einer Fertigungsstufe sind gleich dem Produkt aus dem stufenprodukt-spezifischen Lagerungskostensatz pro Mengeneinheit und Periode K^{L}_{km} und dem Lagerbestand, der von der Periode i auf die Periode i+1 gehalten wird. Der Lagerbestand l_{ikm} bestimmt sich als Differenz aus Lageranfangsbestand L_{Okm} und den kumulierten Zugängen (Stufenausbringungsmengen) einerseits und den kumulierten Abgängen (Einsatzmengen der nachfolgenden Stufen) andererseits. Zur Erfassung der Lagerbestandsbewegungen muß zunächst die Beziehungskette "periodische Absatzmengen der einzelnen Produktarten - periodische Stufenprodukt-Ausbringungsmengen für die einzelnen Produktarten - periodische technische Stufenleistung" geklärt werden. Bezeichnet man mit A_{km} die Anzahl von Leistungseinheiten ($\bar{x} \cdot t$) der k-ten Produktionsstufe,

die für eine Mengeneinheit (x) des aus der k-ten Produktionsstufe hervorgehenden Zwischenproduktes für die Produktart m erforderlich ist, und mit B_{km} die Anzahl von für die m-te Produktart bestimmten Zwischenprodukten der k-ten Fertigungsstufe, die für eine für die m-te Produktart bestimmte Zwischenprodukteinheit der (k+1)-ten Fertigungsstufe erforderlich ist, so gelten die Beziehungen $x_{ijl_k m} = A_{km} \cdot \bar{x}_{ijl_k m} \cdot t_{ijl_k m}$,

$\sum_{j=1}^{J} \sum_{l_k=1}^{L_k} x_{ijl_k m} = B_{km} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_{k+1}=1}^{L_{k+1}} x_{ijl_{k+1} m}$. Demnach gilt für den periodischen Lagerabgang von Stufenprodukten

$$(61) \quad -x_{ikm} = \frac{B_{km}}{A_{k+1,m}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_{k+1}=1}^{L_{k+1}} \bar{x}_{ijl_{k+1} m} \cdot t_{ijl_{k+1} m}$$

für k=1...K-1

und für den periodischen Lagerzugang

$$(62) \quad +x_{ikm} = \frac{1}{A_{km}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_k=1}^{L_k} \bar{x}_{ijl_k m} \cdot t_{ijl_k m}$$

für k=1...K .

Der Lagerabgang der Endstufe ist identisch mit den Absatzmengen $x_{im} = \alpha_{im}(p_{im})$.

Die Lagerhaltungskostenfunktion läßt sich also - als zwölftes Glied der Zielfunktion - wie folgt schreiben:

$$(63) \quad k^L = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{m=1}^{M} \Bigg[K^L_{km} \cdot L_{Okm} + K^L_{km} \cdot \sum_{i'=1}^{i-} \left(\frac{1}{A_{km}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_k=1}^{L_k} \bar{x}_{i'jl_k m} \cdot t_{i'jl_k m} \right.$$

(Fortsetzung der Formel S. 138!)

$$- \frac{B_{km}}{A_{k+1,m}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_{k+1}=1}^{L_{k+1}} \bar{x}_{i'jl_{k+1}m} \cdot t_{i'jl_{k+1}m} \Big) \Big]$$

$$+ \sum_{i=1}^{I} \sum_{m=1}^{M} \Big\{ K_{Km}^{L} \cdot L_{OKm}$$

$$+ K_{Km}^{L} \cdot \sum_{i'=1}^{i} \Big[\frac{1}{A_{Km}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_K=1}^{L_K} \bar{x}_{i'jl_Km} \cdot t_{i'jl_Km} - \alpha_{i'm}(p_{i'm}) \Big] \Big\} \quad .$$

(m) Ein- und Auslagerungskosten

Die Einlagerungskosten (Auslagerungskosten) errechnen sich als Produkt aus stufenprodukt-spezifischem Einlagerungskostensatz K_{km}^{L+} (Auslagerungskostensatz K_{km}^{L-}) pro Mengeneinheit und Netto-Lagerzugang (Netto-Lagerabgang). Das dreizehnte und letzte Glied der Zielfunktion lautet demnach:

(64) $$k^{L\pm} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{m=1}^{M} \Big[\Big(\frac{1}{A_{km}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_k=1}^{L_k} \bar{x}_{ijl_km} \cdot t_{ijl_km}$$

$$- \frac{B_{km}}{A_{k+1,m}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_{k+1}=1}^{L_{k+1}} \bar{x}_{ijl_{k+1}m} \cdot t_{ijl_{k+1}m} \Big) \cdot \begin{Bmatrix} K_{km}^{L+} \\ K_{km}^{L-} \end{Bmatrix}$$

$$\text{wenn } \Big(\frac{1}{A_{km}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_k=1}^{L_k} \bar{x}_{ijl_km} \cdot t_{ijl_km}$$

$$- \frac{B_{km}}{A_{k+1,m}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_{k+1}=1}^{L_{k+1}} \bar{x}_{ijl_{k+1}m} \cdot t_{ijl_{k+1}m} \Big) \begin{Bmatrix} > 0 \\ \leq 0 \end{Bmatrix} \Big]$$

(Fortsetzung der Formel S. 139!)

$$+\sum_{i=1}^{I}\sum_{m=1}^{M}\left(\left[\frac{1}{A_{Km}}\cdot\sum_{j=1}^{J}\sum_{l_K=1}^{L_K}\bar{x}_{ijl_Km}\cdot t_{ijl_Km}\right.\right.$$

$$\left.-\alpha_{im}(p_{im})\right]\cdot\begin{Bmatrix}K_{Km}^{L+}\\ \\ K_{Km}^{L-}\end{Bmatrix}\ \text{wenn}$$

$$\left.\left[\frac{1}{A_{Km}}\cdot\sum_{j=1}^{J}\sum_{l_K=1}^{L_K}\bar{x}_{ijl_Km}\cdot t_{ijl_Km}\ -\ \alpha_{im}(p_{im})\right]\begin{Bmatrix}>0\\ \leqslant 0\end{Bmatrix}\right)\ \cdot$$

(n) Die Zielfunktion insgesamt

Die Zielfunktion des Problems setzt sich also in der hier gegebenen Modellformulierung aus den dreizehn unter (a) bis (m) genannten Komponenten zusammen:

$$
\begin{aligned}
(65)\quad g = {} & e(\mathcal{p}) - k^B(\mathcal{t},\bar{\mathcal{x}}) - k^F(\mathcal{t}) - k^S(\mathcal{t}) \\
& - k^{S+}(\mathcal{t}) - k^{S-}(\mathcal{t}) - k^A(\mathcal{t}) - k^G(\mathcal{t}) \\
& - l^Z(\mathcal{t}) - l^A(\mathcal{t},\bar{\mathcal{x}}) - k^E(\mathcal{t}) \\
& - k^L(\mathcal{p},\mathcal{t},\bar{\mathcal{x}}) - k^{L\pm}(\mathcal{p},\mathcal{t},\bar{\mathcal{x}}).\ ^1
\end{aligned}
$$

Darin bedeuten die Kurzzeichen, die Vektoren der Absatzpreise, Einsatzzeiten und Einsatzintensitäten:

$$\mathcal{p} = (p_{11},\ldots,p_{1M},\ldots,p_{IM})$$

$$\mathcal{t} = (t_{1111},\ldots,t_{111M},\ldots,t_{11L_KM},\ldots,t_{1JL_KM},\ldots,t_{IJL_KM})$$

$$\bar{\mathcal{x}} = (\bar{x}_{1111},\ldots,\bar{x}_{111M},\ldots,\bar{x}_{11L_KM},\ldots,\bar{x}_{1JL_KM},\ldots,\bar{x}_{IJL_KM})$$

(3) Die Nebenbedingungen

(a) Nicht explizit zu erfassende Nebenbedingungen

Die Einhaltung einiger Nebenbedingungen, die bei der Maximierung der Zielfunktion (65) zu beachten sind, ist bereits durch die Laufanweisungen der Indizes automatisch sichergestellt. Z.B. ist durch die Begrenzung des Laufindex j=1...J bereits die maximal zulässige Anzahl von Schichten pro Periode (der Spielraum

---

1 Die Struktur der Abhängigkeiten ist den o.a. Formeln zu entnehmen; im einzelnen sind das: (42), (43) i.V.m. (44), (46) i.V.m. (45), (47), (48), (49), (50) i.V.m. (45), (51), (55), (59), (60) i.V.m. (51a), (63) und (64).

der zeitlichen Anpassung mit der Schichtzahl) erfaßt. Ferner ist ein großer Teil der in bezug auf die originären Variablen zu beachtenden Nebenbedingungen in der Definition der Modellvariablen und den in der Zielfunktion erfaßten Abhängigkeiten berücksichtigt. Z.B. ist die Restriktion, daß bei bestimmten Absatzmengen nur bestimmte Absatzpreise realisierbar sind, in den Absatzfunktionen $x = \alpha(p)$ erfaßt. Die zusätzlich zu beachtenden Nebenbedingungen seien nachfolgend formuliert.

(b) Zeitliche Kapazitätsbedingungen

Kapazitätsbedingungen gelten sowohl für die einzelnen Schichten als auch für die Gesamtheit aller Schichten eines Aggregates in einer Periode. Zunächst darf eine gewisse maximale Schichtdauer nicht überschritten werden (und negative Einsatzzeiten sind unzulässig):

$$(66) \qquad 0 \leq \sum_{m=1}^{M} t_{ijl_k m} \leq T^3_{jl_k} \qquad \begin{array}{l} \text{für } i = 1 \ldots I \\ j = 1 \ldots J \\ k = 1 \ldots K \\ l_k = 1 \ldots L_k \end{array}$$

Ferner darf die Gesamtdauer aller Schichten nicht die Periodenlänge T_i überschreiten:

$$(67) \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} t_{ijl_k m} \leq T_i \qquad \begin{array}{l} \text{für } i = 1 \ldots I \\ k = 1 \ldots K \\ l_k = 1 \ldots L_k \end{array}$$

(c) Mengenmäßige Kapazitätsbedingungen

Engpässe bei der Faktorbeschaffung[1] werden mit den folgenden Bedingungen berücksichtigt:

$$(68)\quad \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l_k=1}^{L_k}\sum_{m=1}^{M} t_{ijl_km}\cdot e_{l_kn}\left[\bar{x}_{ijl_km}, \zeta_{l_k1}(\tau_{ijl_km}, \bar{e}_{ijl_km}), \ldots, \zeta_{l_kP}(\tau_{ijl_km}, \bar{e}_{ijl_km}) \right] \leq R_{in}$$

$$\text{für } i=1\ldots I; \quad n=1\ldots N.$$

Darin bedeuten R_{in} die Beschaffungshöchstmengen der Faktorart n in der Periode i, τ_{ijl_km} die Vektoren der Einsatzzeiten des Aggregates l_k vom Beginn des Planungszeitraumes bis zur j-ten Schicht der i-ten Periode und $\bar{e}_{ijl_km}$ und die Vektoren der Einsatzintensitäten des Aggregates l_k vom Beginn des Planungszeitraumes bis zur jeweiligen Periode und Schicht.

(d) Begrenzung des Spielraumes für Intensitätsvariationen

Der Variationsraum für die Einsatzintensitäten der Aggregate wird in der Regel durch eine Minimal- und eine Maximal-Intensität begrenzt. Es ist daher einzuhalten:

$$(69)\quad \bar{X}^{min}_{l_k} \leq \bar{x}_{ijl_k} \leq \bar{X}^{max}_{l_k} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} i = 1\ldots I \\ j = 1\ldots J \\ k = 1\ldots K \\ l_k = 1\ldots L_k \\ m = 1\ldots M \end{array}$$

Es kann aber auch der Fall vorliegen, daß nur eine endliche Anzahl von Intensitätsstufen zulässig ist.

---

1 Der Einfachheit halber wurde unterstellt, daß im Produktionsfaktorbereich keine Lagerhaltung in Betracht komme.

Die entsprechende Nebenbedingung muß dann die zulässigen Intensitätsstufen für jedes Aggregat aufzählen.

(e) Ganzzahligkeitsbedingungen für Zeit-Variationen

Aufgrund organisatorischer Bedingungen oder aufgrund der Vorentscheidung über den Genauigkeitsgrad der Rechnung kann verlangt sein, daß das Ergebnis der Wirtschaftlichkeitsrechnung nur ganzzahlige Einsatzzeiten (wobei die Zeiteinheit z.B. 15 Minuten oder eine volle Stunde usw. sein kann) enthalten darf.

(f) Ganzzahligkeitsbedingungen für Absatzpreise

Aus den gleichen Gründen kann gefordert werden, daß auch für die Absatzpreise nur ganzzahlige Ziffern im Ergebnis der Wirtschaftlichkeitsrechnung enthalten sein sollen (wobei die Einheit z.B. eine DM oder ein Pfennig sein kann).

(g) Mengenkontinuitätsbedingungen

Das Erfordernis, daß die kumulierten Ausbringungsmengen der einzelnen Fertigungsstufen stets ausreichen müssen, um den kumulierten Bedarf der nachfolgenden Fertigungsstufen (bzw. der Absatzstufe) zu decken, kann dadurch berücksichtigt werden, daß durch besondere Nebenbedingungen negative Lagerbestände ausgeschlossen werden:

$$(70)\quad L_{Okm} + \sum_{i'=1}^{i} \left(\frac{1}{A_{km}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_k=1}^{L_k} \bar{x}_{i'jl_k^m}\, t_{i'jl_k^m} - \frac{B_{km}}{A_{k+1,m}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_{k+1}=1}^{L_{k+1}} \bar{x}_{i'jl_{k+1}^m}\, t_{i'jl_{k+1}^m} \right) \geq 0$$

für $i = 1 \ldots I$
$k = 1 \ldots K-1$
$m = 1 \ldots M$;

$$(71)\quad L_{OKm} + \sum_{i'=1}^{i} \left[\frac{1}{A_{Km}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_K=1}^{L_K} \bar{x}_{i'jl_K^m}\, t_{i'jl_K^m} - \alpha_{i'm}\,(p_{i'm}) \right] \geq 0$$

für $i = 1 \ldots I$
$m = 1 \ldots M.$

(h) Weitere Nebenbedingungen [1]

Da die Finanzierungsweise nicht in das Modell aufgenommen wurde, sei hier auf die Formulierung von Finanzierungsbedingungen verzichtet. (Es sei unterstellt, daß Liquiditätsschwierigkeiten nicht zu erwarten sind.)

Absatzbeschränkungen brauchen hier nicht erfaßt zu werden. Sie sind bereits in den Absatzfunktionen $x = \alpha(p)$ hinreichend erfaßt.[2] Auch Aggregatgleichungen entfallen in diesem Modell, da die entsprechenden Bedingungen bereits in der Zielfunktion i.V.m. der Definition der Variablen berücksichtigt sind.

---

1 Zu den denkbaren Klassen von Nebenbedingungen siehe z.B. H. Jacob, Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung, a.a.O., S. 559 ff.

2 Die explizite Berücksichtigung von Absatzbeschränkungen ist nur in linearen Modellen erforderlich.

c Die Notwendigkeit allgemeiner Lösungsverfahren

Wie weiter oben gesagt, kann, wegen des Umfangs der Literatur zum Produktionsglättungsproblem auf die bisher vorgeschlagenen Lösungen nicht im einzelnen eingegangen werden. Die in der Literatur behandelten Modelle (soweit es diskrete deterministische Modelle[1] betrifft), zu deren Lösung die Transportmethode, die Simplexmethode, parametrische lineare Programmierung, konvexe (quadratische) Programmierung und dynamische Programmierung Verwendung finden[2], erfassen nur Ausschnitte der oben skizzierten Problemstellung und sind als Spezialfälle in dem hier konstruierten Modell enthalten.

Zu den bisher in der Literatur vorgelegten Lösungen von Ausschnitten des Problems der simultanen Produktions-, Lager-, Absatz- und Investitionsplanung bei im Zeitablauf wechselnden Marktverhältnissen sagt Reichmann, man habe fast durchweg "lediglich eine einzige Art der Anpassung des geplanten Bestands an Betriebsmitteln an saisonmäßige Absatzschwankungen unterstellt, nämlich eine mit proportionalen Kosten verbundene zeitliche Anpassung ... In entsprechender Weise wird auch bei der Lagerhaltung nur eine einzige Anpassungsmöglichkeit in die Problemformulierung aufgenommen, nämlich diejenige, die mit proportionalen Kosten verbunden ist."[3]

---

1 Vgl. W. Piesch, Die Lösungen einer Klasse von Produktionsglättungsmodellen, a.a.O., S. 6 - 8.

2 Vgl. die Übersicht und die Literaturangaben bei W. Piesch, Die Lösungen ..., a.a.O., insbesondere S. 149 - 168.

3 Th. Reichmann, Die Abstimmung von Produktion und Lager bei saisonalem Absatzverlauf. Ein Beitrag zur Verbindung von Produktions-, Investitions- und Lagerplanung, Köln - Opladen 1968, S. 33.

Reichmann selbst erweitert die Problemstellung in dieser Beziehung nur durch Formulierung eines Zwei-Schichten-Modells mit abschnittsweise linearen Kostenfunktionen.[1]

Ferner: Obwohl man sich darüber einig ist, daß verteilungsabhängige Produktions- und Lagerkosten durch Glättungsmaßnahmen im Absatzbereich eingespart werden könnten,[2] wird "in der bisherigen Literatur generell ... von der Prämisse einer gegebenen Zeit-Absatz-Funktion" [3] ausgegangen. Wird aber diese Prämisse aufgehoben, so vernachlässigt man wieder die verschiedenen Anpassungsmaßnahmen im Produktionsbereich mit ihren unterschiedlichen kostenmäßigen Auswirkungen.[4]

Für diesen Bereich scheint also in besonderem Maße zu gelten, was weiter oben bemängelt wurde: Man schneidet die Modelle auf elegante Lösungsverfahren zu, anstatt das Problem zunächst so zu formulieren, wie es in der Unternehmungspraxis zur Entscheidung ansteht.

Es kann wohl kein Zweifel bestehen, daß das vorstehend konstruierte Modell mehr Struktur-Informationen erfaßt als alle bisher in der Literatur gelösten Modelle. Dies hat allerdings zur Folge, daß keine der herkömmlichen Techniken der Wirtschaftlichkeitsrechnung auf dieses Modell anwendbar ist.

---

1 Th. Reichmann, Die Abstimmung ... a.a.O., S. 116 ff.

2 Ebenda S. 35 f.; W. Piesch, Die Lösungen ... a.a.O., S. 1.

3 M. Seitz, Probleme der betrieblichen Planung ... a.a.O., S. 40.

4 Ebena S. 237 - 278.

Es zeigt sich, daß eine adäquate Erfassung der Struktur der empirischen Entscheidungssituation zu einem derart komplexen Modell führt , daß die Anwendungsvoraussetzungen aller oben genannten Optimierungsverfahren verletzt sind. Die Zielfunktion enthält stetige lineare, nichtlineare, quadratische und nichtkonkave, geknickte und sprungfixe sowie nichtdifferenzierbare Glieder. Auch die Nebenbedingungen weisen teilweise nichtdifferenzierbare Elemente auf, und der Lösungsraum ist nicht konvex. Will man in dem vorstehenden Modell eine Wirtschaftlichkeitsrechnung anstellen, so ist dazu ein Verfahren erforderlich, das keine diesen Gegebenheiten widersprechenden Anwendungsvoraussetzungen hat; genauer: bei dem es genügt, wenn für jeden Punkt im Lösungsraum der Wert der Zielfunktion berechenbar ist und wenn bei jeder Niveaukombination der Variablen festgestellt werden kann, ob sie zulässig oder unzulässig ist bzw. der betreffende Punkt Element des Lösungsraumes ist oder nicht.

D Iterative Suchverfahren als allgemeiner Ansatz zur Behandlung unternehmerischer Entscheidungsprobleme

I Das Prinzip der Methoden zulässiger Richtungen als allgemeiner Ansatz

Das gesuchte allgemein anwendbare Prinzip zur rechnerischen Behandlung unternehmerischer Entscheidungsprobleme im Rahmen von Modellen, die den empirischen Gegebenheiten der Entscheidungssituation möglichst isomorph sind, glaubt der Verfasser in den Grundzügen der "Methoden zulässiger Richtungen"[1] sehen zu können. Diese sind zwar sämtlich ursprünglich nur für Probleme mit konvexer (bei Minimierungsproblemen) bzw. konkaver (bei Maximierungsproblemen) Zielfunktion und konvexem Lösungsraum konzipiert, wobei Zielfunktion und Nebenbedingungen kontinuierlich differenzierbar sein sollen. Nur unter diesen Voraussetzungen lassen sich Konvergenzbeweise führen.

Den Grundgedanken der Verfahren zulässiger Richtungen, nämlich die Anwendung eines von einer gegebenen Ausgangslösung sukzessive zu besseren Lösungen fortschreitenden Suchprozesses, kann man jedoch auch auf Probleme mit beliebiger nichtlinearer Struktur, insbesondere auch auf die im Rahmen der Betriebswirtschaftslehre besonders interessierenden Probleme mit Ganzzahligkeitsbedingungen übertragen. Natürlich hat es schwerwiegende Konsequenzen, wenn man den Anwendungsbereich der Verfahren zulässiger Richtungen so erweitert: Man

---

1 G. Zoutendijk, Methods of Feasible Directions, a.a.O., S. 64 ff.; H.P. Künzi - W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 181-198; W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 104-107.

kann keinen allgemeinen Konvergenzbeweis führen, man kann nicht sicher sein, ob der Suchprozeß zur absolut besten Lösung des Modells - im folgenden "globales Optimum" - führt, oder ob er bei einem niedrigeren "lokalen Optimum" endet. Ein lokales Optimum (Maximum) sei hier wie folgt definiert: Ein Punkt $z \in V \subset E^n$ stellt dann ein lokales Maximum dar, wenn für alle dem Punkt z unmittelbar benachbarten zulässigen Punkte y gilt: $f(y) \leq f(z)$[1]. Dabei heißen zwei Punkte unmittelbar benachbarte Punkte, wenn sie sich in einer oder mehreren Koordinaten unterscheiden und kein anderer zulässiger Punkt existiert, bei dem die entsprechende(n) Koordinatendifferenz(en) (zu einem der betrachteten Punkte) mit gleichem Vorzeichen absolut geringer ist (sind).

Für die Ausdehnung des Anwendungsbereiches von Verfahren zulässiger Richtungen oder - wie es hier auch heißt - iterativen Suchverfahren auf beliebig nichtlineare (ganzzahlige) Probleme gilt also: Das Ergebnis der Wirtschaftlichkeitsrechnung ist eine Konstellation der Handlungsvariablen, bei der man nicht aus dem Rechenverfahren selbst erkennen kann, ob sie optimal ist oder nicht. Immerhin aber sind solche Suchverfahren, auf die nachfolgend näher eingegangen werden soll, im heuristischen Sinne zur Auffindung einer "befriedigenden" Lösung (wie weiter oben definiert) geeignet.

---

1 Zur Erläuterung der Symbole siehe das Symbolverzeichnis am Schluß der Arbeit.

II Darstellung der Grundgedanken der Methoden zulässiger Richtungen

Das Prinzip der Methoden zulässiger Richtungen kann wie folgt beschrieben werden: Das Problem sei in einem Modell erfaßt, das die zulässigen Alternativen der Handlungsweise und ihre Bewertung durch eine Zielfunktion und einen Satz von Nebenbedingungen beschreibt.

Es gilt

(72) $g = f(y) \rightarrow \max!$

unter der Bedingung

(73) $y \in V.$

Dabei bedeutet g den zu maximierenden Unternehmungsgewinn, f(y) ist die Zielfunktion, die die Abhängigkeit des Gewinns von den n einzelnen Variablen angibt. y ist ein Vektor mit n Komponenten, die Niveaus von n Variablen bedeuten, und stellt einen beliebigen Punkt in E^n (d.h. im n-dimensionalen Euklidischen Raum) dar. $V \subset E^n$ stellt die Menge der zulässigen Lösungen (Punkte) in E^n dar und ist im Einzelfall durch ein System von Restriktionen determiniert.

Der Suchprozeß besteht nun darin, daß von einem beliebigen zulässigen Ausgangspunkt z^1 zu einem neuen Punkt z^2 übergegangen wird, von diesem zu einem dritten Punkt z^3 usw. - allgemein von einem Punkt z^k zu dem nächsten Punkt z^{k+1} bis mit z^{k+} das Optimum gefunden ist. Und zwar wird jeweils

der neue Punkt z^{k+1} durch Angabe der Richtung d^k und des Ausmaßes τ^k der Bewegung vom jeweiligen Ausgangspunkt z^k im Lösungsraum V determiniert[1].

$$(74) \qquad z^{k+1} = z^k + \tau^k \cdot d^k \qquad \text{für } k=1,\ldots,k^+-1$$

wobei k^+ so definiert ist, daß $f(z^{k^+}) = \max_{y \in V} [\bar{f}(y)]$ gilt.

Die einzelnen Verfahren dieser Gruppe unterscheiden sich nun in der Art und Weise der Bestimmung der Richtungen d^k und/oder der Schrittweiten τ^k.[2]

Dabei wird i.d.R. (bei zuvor festgelegter Richtung d^k) die Schrittweite τ^k so gewählt, daß

$$(75) \qquad f(z^{k+1}) = \max_{\alpha \geq \tau \geq \beta} [\bar{f}(z^k + \tau \cdot d^k)]$$

gilt, wobei α und β als charakteristische Parameter für das jeweilige Verfahren innerhalb der Grenzen $0 < \alpha \leq \infty$; $-\alpha \leq \beta \leq 0$ festgelegt sind[3,4].

Was die verschiedenen Versionen bezüglich der Bestimmung von d^k betrifft, so handelt es sich um eine der folgenden beiden oder um eine zwischen diesen extremen Möglichkeiten einzuordnende Methode: Entweder wird d^k als die Richtung des steilsten Anstiegs der Zielfunktion oder in zyklischer Reihenfolge als eine der koordinatenparallelen Richtungen, z.B. in einem dreidimensionalen Problem (n=3)

---

1 Vgl. W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 104; H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O., S. 530 f.; H.P. Künzi - W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 181 f.

2 Vgl. z.B. G. Zoutendijk, Methods of Feasible Directions, a.a.O., S. 12; H.P. Künzi - W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 182.

3 W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 104.

4 Ferner muß natürlich τ innerhalb dieser Grenzen so festgelegt werden, daß $z^{k+1}=z^k+\tau^k d^k \in V$ ist.

$$d = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad d = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

gewählt. Die Algorithmen, die das erste Prinzip realisieren, werden als "Methoden des steilsten Anstiegs", diejenigen, die dem zweiten Prinzip folgen, als "Methoden des zyklischen Koordinatenanstiegs"[1] bezeichnet.

Bei den Methoden des steilsten Anstiegs sind in jedem Schritt $z^k \rightarrow z^{k+1}$ zwei Maximierungsprobleme zu lösen, nämlich

1. die Bestimmung der optimalen Richtung d^+, so daß

$$(76) \qquad f(z^k+d^+) = \max_d \left[\bar{f}(z^k+d)\right]$$

gilt, und

2. die Bestimmung der optimalen Schrittweite τ^+, so daß unter Beachtung der Nebenbedingung

$$(77) \qquad z^k + \tau \cdot d^+ \in V \qquad \text{gilt:}$$

$$(78) \qquad f(z^{k+1}) = f(z^k+\tau^+ \cdot d^+) = \max_{0<\tau\leq\alpha} \left[\bar{f}(z^k+\tau \cdot d^+)\right]^2$$

In Problemen mit kontinuierlich differenzierbarer Zielfunktion erübrigt sich die explizite Maximierung über die Richtungen d; man wählt stets die Richtung des Gradienten (des Vektors der ersten partiellen Ableitungen).

---

1 "Cyclic-coordinate-ascent method", W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 111.

2 Für die Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs gilt $-\alpha \leq \tau \leq +\alpha$.

(79) $d^k = \nabla f(z^k)$,

da der Gradient die Richtung des steilsten Anstiegs d^+ angibt[1]. Die Anwendung dieser Eigenschaft des Gradienten zur Maximierung nichtlinearer Funktionen wurde bereits im Jahre 1847 von Cauchy[2] vorgeschlagen[3]. Neuere Verfahren nehmen verschiedene Modifikationen bei der Bestimmung der "optimalen" Richtung vor, mit denen die Nebenbedingungen berücksichtigt werden, im wesentlichen um ein "Festfahren" ("Jamming") des Suchprozesses auf nichtoptimalen Punkten (am Rande des Lösungsraumes) zu vermeiden[4].

Die Anwendung von Methoden des steilsten Anstiegs in Form von Gradientenmethoden setzt naturgemäß eine kontinuierlich differenzierbare Zielfunktion (und ggf. kontinuierlich differenzierbare Nebenbedingungen) voraus. "In vielen Anwendungsfällen jedoch mag es, obwohl bekannt sein mag, daß die Funktion 'sich wohlverhaltende'[5] partielle Ableitungen besitzt, recht schwierig oder zeitraubend sein, diese explicite zu berechnen".[6] In solchen Fällen kann sich die Anwendung der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs empfehlen[7], bei der der erste Optimierungsschritt ganz entfällt.

1 Vgl. z.B. W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 23 f.; H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O., S. 534.

2 A.L. Cauchy, Méthode Générale pour la Résolution des Systèmes d'Equations Simultanées, Comptes Rendus, Académie Science, Paris, Vol. XXV, 1847, S. 536-538, zitiert nach W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 335.

3 Vgl. H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O., S. 534.

4 Vgl. W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 279 f.

5 Mit "Wohlverhalten" ist gemeint, daß sich keine besonderen Komplikationen ergeben.

6 "In many applications however, althought the function might be known to possess well-behaved partial derivatives, it might be quite difficult or time consuming to explicitly calculate them." W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O.,S.111.

7 W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O.,S.111.

Der zweite Optimierungsschritt (Bestimmung der optimalen Schrittweite τ^+) erstreckt sich in jedem Falle nur auf ein eindimensionales Maximierungsproblem, dessen Lösung i.d.R. keine Schwierigkeiten bereiten dürfte[1].

Der Suchprozeß endet, wenn der Gradient $\nabla f(z^k)=0$ bzw. die optimale Schrittweite (bei der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs in n aufeinanderfolgenden Schritten[2]) $\tau^+ = 0$ ist. Dies sind nämlich, wie leicht einzusehen ist, Kriterien dafür, daß es sich bei dem letzten aufgefundenen Punkt z^k um ein lokales Maximum[3] handelt[4].

---

1 Als Lösungsmethoden für dieses eindimensionale Maximierungsproblem kommen die Anwendung der Differentialrechnung, ein unimodales Suchverfahren wie Fibonacci- oder Bolzano-Suche oder - bei Problemen mit Ganzzahligkeitsbedingungen - die Enumeration aller in der Richtung $d^+ = \nabla f(z^k)$ liegenden Punkte in Betracht.

2 Bei kontinuierlichen Problemen konvergiert die Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs streng genommen erst in unendlich vielen Schritten.

3 Das Kriterium $\nabla f(z^k) = 0$ ist notwendig aber generell nicht hinreichend für ein lokales Maximum, es ist auch bei (lokalen) Minima und bei Sattelpunkten erfüllt. Es ist notwendig und hinreichend, wenn bekannt ist, daß die Zielfunktion quasi-konkav ist.

4 Ist das Problem eingipfelig, d.h. ist die Zielfunktion konkav und der Lösungsraum konvex, so handelt es sich um das globale Maximum.

III Die Übertragung der Grundgedanken der Methoden zulässiger Richtungen auf die Behandlung beliebig nichtlinearer ganzzahliger Probleme

1 Vorbemerkung

Das Prinzip des Suchprozesses, für dessen Anwendung sich bei Vorliegen der oben genannten Voraussetzungen Konvergenzbeweise führen lassen, kann im Sinne heuristischer Optimumsuche auf beliebig nichtlineare ganzzahlige Probleme übertragen werden.

Im folgenden seien zwei spezifische Organisationsformen des Suchprozesses für solche Probleme beschrieben und analysiert. Und zwar sei zunächst ein Verfahren zur Behandlung nichtlinearer ganzzahliger Probleme als Methode des steilsten Anstiegs, danach ein solches als Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs dargestellt. Ferner sei eine Version beschrieben, die bezüglich der Auswahl der Suchrichtung eine Kombination aus den beiden ersteren darstellt. Nach einer vergleichenden Besprechung soll schließlich diese "Methode des steilsten Koordinatenanstiegs" durch Entwicklung von Zusatzregeln für die Schrittweitenbestimmung gewisse Erweiterungen erfahren.

Für keines dieser Verfahren werden spezielle Struktureigenschaften des Problems in Zielfunktion und Nebenbedingungen vorausgesetzt. Es wird lediglich vorausgesetzt, daß jeder Punkt $y \in E^n$ als zulässig ($y \in V$) oder nicht zulässig ($y \notin V$) identifiziert und für jede Handlungsalternative (durch einen zulässigen Punkt beschrieben) der Gewinn (Wert der Zielfunktion) angegeben werden kann. D.h. es ist irgendeine Zuordnung von Gewinnziffern zu alternativen Lösungen, ausgedrückt durch $f(y)$, und eine allgemeine Beschreibung des

zulässigen Entscheidungsfeldes V gegeben. Die Zielfunktion f(y) kann in analytischer Form oder auch ganz oder teilweise in Form von Wertetabellen einzelner Gewinnkomponenten vorliegen. Z.B. möge die Unternehmung über Aufzeichnungen von alternativen Ausbringungsmengen einzelner Betriebsteile und den zugehörigen Fertigungskosten, über Tabellen von Rabattstaffeln für zu beschaffende Rohstoffe, über Vorstellungen von bei alternativen Absatzmengen erzielbaren Absatzpreisen und dgl. verfügen; aus solchen Elementen kann dann für jede konkrete Lösung durch Zusammenfassung der Gewinn berechnet werden.

Das Problem besteht formal in folgendem: Gesucht ist ein Element $y^+ \in V$, für das

(80) $$f(y^+) = \max_{y \in V} \left[\bar{f}(y)\right] \text{ gilt.}$$

Verbal: Von allen Punkten im n-dimensionalen durch einen Satz von Nebenbedingungen einschließlich der Ganzzahligkeitsbedingung bezüglich aller n Variablen definierten Lösungsraum V soll derjenige (bzw. ein) Punkt bestimmt werden, dem ein möglichst großer Zielfunktionswert zugeordnet ist.

2 Die Methode des steilsten Anstiegs als allgemeines heuristisches Optimierungsverfahren

Die Methode des steilsten Anstiegs ist dadurch gekennzeichnet, daß auf der von einem aufgefundenen Punkt z^k nach einem neuen, besseren Punkt z^{k+1} stets diejenige der zulässigen Richtungen d eingeschlagen wird, in der der Wert der Zielfunktion am stärksten ansteigt. Da hier weder Differenzierbarkeit noch Kontinuierlichkeit der Zielfunktion unterstellt werden, kann die optimale Richtung nicht dadurch bestimmt werden, daß man

den Gradienten $\nabla f(z^k)$ berechnet (und ggf. die von ihm angezeigte Richtung im Hinblick auf die Nebenbedingungen modifiziert).

Stattdessen muß man die Richtung wählen, in der der unmittelbar benachbarte Punkt[1] den höchsten Zielfunktionswert aufweist. Die Vorgehensweise sei etwas ausführlicher erläutert:

Es werden zunächst alle dem jeweiligen Ausgangspunkt unmittelbar benachbarten Punkte tabelliert. Ist z.B. in einem zweidimensionalen Problem der Ausgangspunkt durch den Vektor

$$z^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

bezeichnet, so sind (unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeitsbedingung) die unmittelbar benachbarten Punkte:

$$y_1^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$y_2^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$y_3^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$y_4^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$y_5^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y_6^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1 Zur Definition siehe Seite 150.

$$y_7^k = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

$$y_8^k = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

U.U. können durch Prüfung der Zulässigkeit anhand der Nebenbedingungen einige von den oben aufgezählten Punkten eliminiert werden. Zu den verbleibenden (zulässigen) benachbarten Punkten wird jeweils der Zielfunktionswert berechnet, und durch Enumeration dieser Punkte wird derjenige benachbarte Punkt bestimmt, der den höchsten Zielfunktionswert aufweist.

Die Differenz aus dem optimalen zulässigen Nachbarpunkt y_+^k und dem Ausgangspunkt z^k stellt die "optimale" Richtung dar. Es gilt also

(81) $$d^k = y_+^k - z^k$$

wobei y_+^k so bestimmt ist, daß

$$f(y_+^k) = \max_{j=1\ldots3^n-1} \left[\bar{f}(z^k+d_j) \,\middle|\, (z^k+d_j \in V)\right] \text{ ist.}$$

Darin bezeichnet d_j die unter ausschließlicher Beachtung der Ganzzahligkeitsbedingung zulässigen Richtungen, in dem obigen Beispiel sind das

$$d_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ d_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\ d_3 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ \ldots;\ d_8 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Ist $f(y_+^k) < f(z^k)$, so liegt in z^k ein lokales Maximum, und der Suchprozeß wird abgebrochen.

Ist dagegen $f(y_+^k) \geq f(z^k)$, so ist als nächstes die optimale Schrittweite zu bestimmen. Dazu werden alle zulässigen Punkte gebildet, die von z^k aus in der Richtung d^k liegen, gebildet, d.h. alle Punkte

(82) $\quad y = z^k + \tau \cdot d^k$

mit $\tau > 0$ so, daß $y \in V$ ist, und für jeden dieser Punkte wird der Zielfunktionswert berechnet. Ist etwa in dem obigen Beispiel

$$d^k = d_8 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als optimale Richtung festgestellt worden und sind z.B. u.a. die Nebenbedingungen $x_1 \geq 0$ und/oder $x_2 \leq 8$ zu beachten, so ist der Wert der Zielfunktion für die folgenden Punkte zu berechnen:

$$y_9^k = z^k + 1 \cdot d^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$y_{10}^k = z^k + 2 \cdot d^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$y_{11}^k = z^k + 3 \cdot d^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Diejenige Schrittweite τ, bei der der größte Zielfunktionswert erreicht wird, ist die "optimale" Schrittweite. Derjenige Punkt, der in der optimalen Richtung d^k mit der optimalen Schrittweite τ^+ erreicht wird, wird als Ausgangspunkt z^{k+1} für den nächsten Schritt gewählt.

(83) $\quad z^{k+1} = z^k + \tau^+ \cdot d^k$

wobei d^k nach Maßgabe von (81) und τ^+ so bestimmt ist, daß

$$f(z^{k+1}) = \max_{\tau = 1,2,3,\ldots} \{\bar{f}(z^k + \tau \cdot d^k \mid z^k + \tau \cdot d^k \in V\}.$$

Dieser iterative Suchprozeß wird solange fortgesetzt, bis ein Punkt z^{k+} gefunden ist, dessen Zielfunktionswert höher ist als die Zielfunktionswerte aller unmittelbar benachbarten Punkte $y_j^k = z^{k+} + d_j$ (wobei $(z^{k+} + d_j) \in V$ erfüllt sein muß). Dieser stellt generell ein lokales Maximum, in eingipfeligen Problemen das globale Maximum dar.

Zur Bestimmung der optimalen Richtung sind in jedem Schritt $z^k \rightarrow z^{k+1}$ (abgesehen davon, daß einige Richtungen unzulässig sein können) 3^n-1 Zielfunktionsberechnungen erforderlich.

Die Anzahl der Zielfunktionsberechnungen, die in jedem Schritt zur Bestimmung der optimalen Schrittweite erforderlich sind, ist gleich der Anzahl der in der optimalen Richtung liegenden zulässigen Punkte, ist also bei gegebener Richtung und gegebenem Ausgangspunkt ausschließlich von der Ausdehnung des zulässigen Lösungsraumes abhängig.

Die Gesamtzahl der Zielfunktionsberechnungen setzt sich zusammen aus den Anzahlen bei jedem Schritt und der Anzahl der erforderlichen Schritte. Letztere ist zunächst abhängig von der Lage des (willkürlich gewählten) Anfangspunktes z^1. Bei gegebenem Anfangspunkt wird sie tendenziell umso geringer sein, je "glatter", und umso größer sein, je "zerklüfteter" das "Zielfunktionsgebirge" ist. Da nämlich bei der Bestimmung der "optimalen" Richtung ausschließlich auf das Verhalten der Zielfunktion in der unmittelbaren Umgebung des jeweiligen Bezugspunktes z^k abgestellt wird, kann die Suche nach dem Maximum durch Sprünge, Knicke und Wendepunkte zunächst in eine falsche Richtung (über die man nur mit Umwegen zum "Gipfel" gelangt) gelenkt werden. Ist die Zielfunktion dagegen streng konkav, so wird der steilste Anstieg in der unmittelbaren Umgebung eines Punktes z^k einen kürzeren Weg zum Maximum anzeigen[1].

1 Daß diese Aussage allerdings nicht generell gelten kann, zeigt u.a. Abb. 14,7 bei H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O., S. 535.

Selbstverständlich stellt das vorstehend beschriebene Verfahren nur eine von mehreren denkbaren Versionen von Methoden des steilsten Anstiegs dar. Durch gewisse Vereinfachungen wie z.B. Auswahl der "optimalen" Richtung aus einer irgendwie begrenzten Anzahl zulässiger Richtungen oder Begrenzung der in Betracht gezogenen Schrittweiten kann unter günstigen Umständen der Rechenaufwand reduziert werden. Zur grundsätzlichen Kennzeichnung der Organisation des Suchprozesses bei Methoden des steilsten Anstiegs hielt jedoch der Verfasser die ausgewählte Version für am besten geeignet.

3 Die Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs

Der größte Anteil des Rechenaufwandes liegt bei der Methode des steilsten Anstiegs in der Bestimmung der optimalen Richtung. Die Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs verzichtet hierauf völlig und benutzt in zyklischer Reihenfolge die koordinatenparallelen Richtungen; z.B. in einem dreidimensionalen Problem:

im Schritt $z^k \rightarrow z^{k+1}$ die Richtung $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

im Schritt $z^{k+1} \rightarrow z^{k+2}$ die Richtung $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

im Schritt $z^{k+2} \rightarrow z^{k+3}$ die Richtung $d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

im Schritt $z^{k+2} \rightarrow z^{k+4}$ die Richtung $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ usw.

Die optimale Schrittweite wird unter allen positiven und negativen τ sowie $\tau = 0$ so bestimmt, daß

$$(84)\quad f(z^{k+1}) = \max_{-\infty<\tau<+\infty} \left[\bar{f}(z^k+\tau\cdot d_i) \,\middle|\, z^k+\tau\cdot d_i \in \underline{V}\right],$$

wobei $i \equiv k$ modulo n [1]
und d_i der Einheitsvektor mit der Komponente 1 an der i-ten Stelle ist.

Der so zu beschreibende iterative Suchprozeß endet, wenn für irgendein k gilt:

$$(85)\quad z^k = z^{k-n+1}$$

Denn in diesem Falle (die optimale Schrittweite war in n-1 aufeinanderfolgenden Schritten $\tau = 0$) ist in keiner koordinatenparallelen Richtung ein besserer Punkt zu finden.

Allerdings kann nicht generell bewiesen werden, daß der so determinierte Punkt ein lokales Maximum darstellt. Dies ist z.B. dann nicht der Fall, wenn der tatsächliche lokale Optimalpunkt y^+ keine benachbarten Punkte hat, die sich nur in einer einzigen Koordinate von ihm unterscheiden, d.h. wenn y^+ nur durch Diagonalbewegungen erreicht werden kann.

Darüberhinaus ist die koordinatenparallele Suche gar nicht möglich, wenn zu dem den Lösungsraum determinierenden Nebenbedingungen auch solche in Form von Gleichungen gehören. Diese Einschränkung kann jedoch

---

1 k modulo n bezeichnet den Rest der bis zu einem ganzzahligen Ergebnis durchgeführten Division k n. Zum Beispiel: 857 modulo 10 ≡ 7; 45 modulo 7 ≡ 3. Vgl. z.B. H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O., S. 899.

durch eine andere Definition des Lösungsraumes V und Einführung von "Strafkosten"-Gliedern in die Zielfunktion umgangen werden[1]. Hierauf sei weiter unten näher eingegangen.

Der Rechenaufwand, gemessen in der Anzahl der erforderlichen Zielfunktionsberechnungen, ist hier primär nur von der Anzahl der zulässigen Variationsbreite der einzelnen Variablen und der Anzahl der erforderlichen Schritte $z^k \rightarrow z^{k+1}$ abhängig. Letztere kann (bei gegebenem Anfangspunkt) je nach der Struktur des Problems größer oder kleiner sein als bei der Methode des steilsten Anstiegs. Sie ist am geringsten, wenn unabhängig von der Niveaukombination von n-1 Variablen in einem Ausgangspunkt z^k mit dem Schritt $z^k \rightarrow z^{k+1}$ stets dasselbe Niveau der n-ten Variablen erreicht wird. In diesem Falle sind bis zum Auffinden eines lokalen Maximums n und bis zum Abbruch der iterativen Optimumsuche nach Maßgabe des Kriteriums (85) weitere n-1 Schritte erforderlich. Die Anzahl der erforderlichen Schritte ist am größten, wenn die optimalen Niveaus der einzelnen Variablen nur sukzessive in kleinen Schritten erreicht werden können, wenn also je nach der Niveaukombination von n-1 Variablen in z^k für jedes k ein anderes Niveau der n-ten Variablen als für den Schritt $z^k \rightarrow z^{k+1}$ optimal erscheint. Dies kann durch die Gestalt der Zielfunktion und/oder der Nebenbedingungen bedingt sein.

---

1 Vgl. z.B. W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 248 ff.; M. Bellmore - H.J. Greenberg - J.J. Jarvis, Generalized Penalty - Function Concepts in Mathematical Optimization, Operations Research, Band 18, 1970, S. 229-252.

Diese Aussage sei durch die folgenden Abbildungen für zweidimensionale Probleme illustriert. Abb. 2 zeigt den iterativen Suchprozeß im günstigsten, Abb. 3 im ungünstigsten Fall.

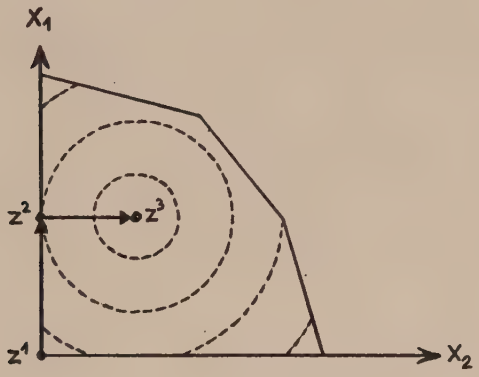


Abbildung 2

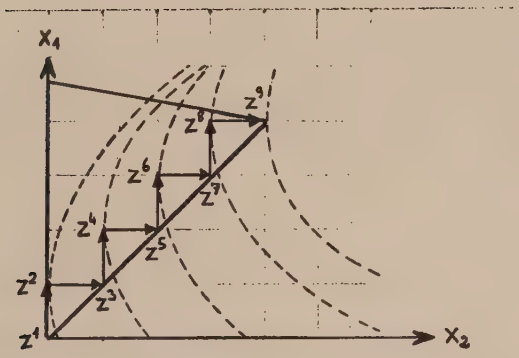


Abbildung 3

Sprünge, Knicke und Wendepunkte in der Zielfunktion können dagegen das Konvergenzverhalten der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs nicht beeinträchtigen, da das Verfahren nicht auf das Verhalten der Zielfunktion in der unmittelbaren Umgebung des jewei-

ligen Ausgangspunktes, sondern auf die Werte der Zielfunktion bei den zur Bestimmung der optimalen Schrittweite zu berechnenden Punkte, also bei den Alternativen für z^{k+1} abstellt.

Es ist also leicht vorstellbar, daß es Probleme gibt, in denen (bei gleichem Anfangspunkt z^1) die Methode des steilsten Anstiegs weniger/mehr Rechenaufwand erfordert und/oder zu einer besseren/schlechteren[1] Lösung führt als die Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs. Bedauerlicherweise kann man in einem konkreten Problem den Rechenaufwand und das Ergebnis nicht ex ante beurteilen, so daß keine generelle Aussage über die bessere/schlechtere Eignung eines der beiden dargestellten Verfahren gemacht werden kann. Allenfalls könnte man aufgrund umfangreicher Erfahrungen eine Tendenzaussage hierüber im statistischen Sinne gewinnen.

4 Die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs

a Die Schwächen der Methoden des steilsten Anstiegs und des zyklischen Koordinatenanstiegs

Die Schwächen der Methode des steilsten Anstiegs liegen in der großen Anzahl zulässiger Richtungen (3^n-1 bei einem "inneren" Punkt) und dem damit verbundenen Rechenaufwand zur Bestimmung der optimalen Richtung in jedem Iterationsschritt sowie in dem bei Sprüngen, Knicken und/oder Wendepunkten schlechten Konvergenzverhalten, das dadurch bedingt ist, daß bei der Auswahl der "optimalen" Richtung ausschließlich auf das Verhalten der Zielfunktion in der unmittelbaren Umgebung des jeweiligen Ausgangspunktes abgestellt wird.

---

1 Ist $f(y^1) > f(y^2)$, so heiße der Punkt y^1 "besser" als y^2. Im Falle $f(y^1) = f(y^2)$ seien die Punkte y^1 und y^2 als "gleichwertig" bezeichnet.

Die Schwäche der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs liegt darin, daß anstatt diagonaler Bewegungen durch den Lösungsraum nur stufenförmige Folgen von kleineren koordinatenparallelen Schritten möglich sind. Damit wird - im Vergleich zur Methode des steilsten Anstiegs - die Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte und der Gesamt-Rechenaufwand zur Bestimmung optimaler Schrittweiten u.U. sehr groß. Diese Schwäche ist in erster Linie dadurch bedingt, daß die Reihenfolge der zyklisch nacheinander einzuschlagenden Richtungen (etwa nach Maßgabe der fortlaufenden Numerierung der Variablen) im Grunde zufällig, jedenfalls nicht am konkreten Problem orientiert ist.

Die Schwächen beider Verfahren können u.U. gemildert werden, wenn man eine Mischform aus ihnen konstruiert. Ein Verfahren, das Gedanken sowohl der Methode des steilsten Anstiegs als auch der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs in sich vereinigt, sei im folgenden zur Diskussion gestellt und weiter unten im Hinblick auf die Bestimmung des globalen Maximums erweitert. Dieses Verfahren sei als "Methode des steilsten Koordinatenanstiegs" bezeichnet.

b Darstellung der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs

Der Grundgedanke der Methoden zulässiger Richtungen, nämlich die iterative Suche nach einem die Zielfunktion maximierenden Punkt im zulässigen Lösungsraum in der Form

$$z^{k+1} = z^k + \tau^+ \cdot d^+ , \tag{86}$$

ausgehend von einem beliebigen zulässigen Punkt, bleibe auch bei der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs erhalten. In einem Problem, das in der hier gewählten Kurzschreibweise gekennzeichnet ist durch

(87) $g = f(y) \rightarrow \max!$

(88) $y \in V$

sei also ein zulässiger Ausgangspunkt z^1 gegeben[1]. Gesucht ist eine Regel, nach der eine Folge von Punkten

$$\left\{z^1, z^2, z^3, \ldots, z^k\right\} = \left\{z^1\right\}_{l=1}^{k} \subset V$$

gebildet wird, so daß einer der Punkte dieser Folge eine optimale (oder zumindest in guter Approximation lokal optimale) Lösung darstellt.

Soll diese Regel die Nachteile der Methode des steilsten Anstiegs und der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs vermeiden, die in der großen Anzahl zu prüfender (bis zu 3^n-1) zulässiger Richtungen bzw. in der zufälligen Reihenfolge der Schrittrichtungen bestehen, vermieden werden, so kann dies nur in der Weise geschehen, daß einerseits die Schrittrichtung d^k nicht dem Zufall überlassen und andererseits die Anzahl der zur Auswahl stehenden Richtungen radikal eingeschränkt wird.

Für die Auswahl der Schrittrichtung d^k sind zwischen den Extremen "beste Richtung aus allen zulässigen Richtungen" und "koordinatenparallele Richtung in zyklischer Reihenfolge" selbstverständlich beliebig viele verschieden geartete Abstufungen möglich. Eine der möglichen Kompromißformen kommt in

---

1 Die Voraussetzung, daß irgendein zulässiger Punkt ohne weiteres zu bestimmen ist, ist "bei nicht konvexen Problemen nicht zu umgehen". R. Pfranger, Ein heuristisches Verfahren zur globalen Optimierung, Unternehmensforschung, Band 14, 1970, S. 27-50, hier S. 28.

den von Fletcher beschriebenen Verfahren[1] von Davies - Swann - Campey[2], Powell[3] und Smith[4] zur Anwendung. Dabei wird die "optimale Richtung" jeweils durch eine lineare Kombination der im vorausgegangenen Schritt angewendeten Richtung und einer Anzahl von Koordinatenrichtungen approximiert. Die Konvergenz mit einer geringen Anzahl von Schritten kann aufgrund bestimmter Eigenschaften konjugierter Richtungen bei quadratischen Funktionen für letztere bewiesen werden[5]. Liegt das absolute Optimum (d.h. das Optimum unter Vernachlässigung der Nebenbedingungen) jedoch außerhalb des Lösungsraumes, so kann die Effizienz erheblich durch die Gestalt der Nebenbedingungen beeinträchtigt werden. Insbesondere die hier unterstellte Ganzzahligkeitsbedingung kann bei diesem Verfahren Schwierigkeiten bereiten, denn es können im iterativen Suchprozeß Richtungen auftreten, in denen nur wenige oder gar keine zulässigen Lösungen liegen, so daß die Optimierung (bezüglich der Schritt-

---

1 R. Fletcher, Function minimization without evaluating derivatives - a review, The Computer Journal, Band 8, 1965/66, S. 33-41.

2 W.H. Swann, Report on the development of a new direct search method of optimization, ICI Ltd., Central Investment laboratory Research Note 64/3, zitiert nach R. Fletcher, Function minimization ..., a.a.O.

3 M.J.D. Powell, An efficient method of finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, The Computer Journal, Band 7, 1964, S. 155 ff., zitiert nach R. Fletcher, Function minimization ..., a.a.O.

4 C.S. Smith, The automatic computation of maximum likelihood estimates, N.C.B. Scientific Dept. Report S.C. 846/MR/40, 1962, zitiert nach R. Fletcher, Function minimization ..., a.a.O.

5 Vgl. R. Fletcher, Function minimization ..., a.a.O.

weite) entlang dieser Richtung nicht möglich ist oder die Approximation in den einzelnen Schritten zu ungenau wird.

Es muß daher nach einem anderen Kompromiß zwischen der Auswahl der besten aus allen zulässigen Richtungen und der Anwendung einer (nach Maßgabe der zyklischen Reihenfolge) vorgegebenen Koordinatenrichtung gesucht werden. Der Mangel der zu großen Anzahl von zulässigen Richtungen, unter denen die beste zu bestimmen ist, einerseits und der problemunabhängigen im Grunde zufälligen Reihenfolge anzuwendender Richtungen andererseits wird behoben, wenn in jedem Schritt die beste der koordinatenparallelen Richtungen gewählt wird. Die Richtungsauswahl orientiert sich dann an der Gestalt der Zielfunktion des konkreten Problems und bezieht sich nur auf n (gegenüber 3^n-1 bei der Methode des steilsten Anstiegs) Alternativen.

Der Nachteil der Methode des steilsten Anstiegs, der in dem ausschließlichen Abstellen auf das Verhalten der Zielfunktion im Ausgangspunkt bzw. dessen unmittelbarer Umgebung (bei der Bestimmung der "optimalen" Richtung) liegt, kann nur behoben werden, wenn "optimale" Richtung und "optimale" Schrittweite simultan bestimmt werden; denn die isoliert auf der Basis einer gegebenen Grundschrittweite (z.B. $\tau = 1$ bei der oben beschriebenen Version einer Methode des steilsten Anstiegs) bestimmte "optimale" Richtung ist nur in einer linearen und in bezug auf alle Variablen vollkommen symmetrischen Funktion mit Sicherheit tatsächlich optimal. Ginge man z.B. von einer Schrittweite $\tau = 1$ aus, so könnte eine bestimmte Richtung d_{j_1} als optimal erscheinen, während auf der Basis einer angenommenen Schrittweite $\tau = 2$ die größte

Erhöhung des Zielfunktionswertes in einer anderen Richtung d_{j_2} zu vermuten sein mag[1].

Mit einer simultanen Bestimmung von Richtung und Schrittweite kann ferner den u.U. schlechten Konvergenzeigenschaften der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs begegnet werden, insoweit sie dadurch bedingt sind, daß dort die Reihenfolge der in den einzelnen Iterationsschritten angewendeten Richtungen im Grunde rein zufällig, nämlich nach Maßgabe der vorgegebenen fortlaufenden Numerierung der Variablen bestimmt ist.

Nach der hier vorzuschlagenden Methode des steilsten Koordinatenanstiegs sollen daher Richtung $d^k = d_i$ und τ^k simultan bestimmt werden, so daß für $z^{k+1} = z^k + \tau^k \cdot d^k$ gilt:

$$(89)\quad f(z^{k+1}) = \max_{\substack{-\infty<\tau<+\infty \\ \tau\neq 0 \\ i=1..n \\ d_i\neq d^{k-1}}} \left\{ \bar{f}(z^k+\tau\cdot d_i) \,\middle|\, z^k+\tau\cdot d_i \in \underline{V} \right\}$$

wobei d_i der Einheitsvektor mit der Komponente 1 an der i-ten Stelle ist. Das bedeutet: Von allen zulässigen Punkten, die sich im Niveau einer und nur einer Variablen von dem jeweiligen Ausgangspunkt z^k unterscheiden, wird der Punkt mit dem höchsten Zielfunktionswert als neuer Punkt z^{k+1} bestimmt.

---

1 Die tatsächlich optimale Richtung wäre diejenige, die in einem Schritt auf das Maximum führt. Sie würde sich bei einer Auswahl unter allen zulässigen Richtungen auf der Basis der optimalen Schrittweite ergeben. Aufgrund der sukzessiven Bestimmung von Richtung und Schrittweite aber geht die jeweils ausgewählte Richtung prinzipiell (bei kontinuierlichen Problemen) am optimalen Lösungspunkt vorbei. Vgl. z.B. H.M. Wagner, Principles of Operations Research, a.a.O., S. 534 ff., insbes. Abb. 14.7, S. 535.

Es ist nun zu klären, wann der so gekennzeichnete iterative Suchprozeß abbrechen soll. Dazu ist folgendes zu überlegen: Da die Bewegung im Lösungsraum von einem gegebenen Ausgangspunkt zu einem (lokalen) Maximum i.d.R. nicht mit diagonal verlaufenden Schritten erfolgen kann, sondern diagonale Bewegungen durch stufenförmige Zick-Zack-Bewegungen ersetzt werden müssen, muß nicht unbedingt jeder Schritt auf dem Wege zum Maximum eine am Zielfunktionswert meßbare Annäherung an dieses bedeuten. Der iterative Suchprozeß darf also nicht schon dann enden, wenn $f(z^{k+1}) < f(z^k)$, sondern erst dann, wenn sicher ist, daß, ausgehend von dem in dem jeweiligen Stadium des Suchprozesses erreichten optimalen Punkt z^{k^+}, auch bei sukzessiver Anwendung aller n-1 Richtungen $d_i \neq d^{k^+-1}$ kein Punkt z^{k^++1} mit $f(z^{k^++1}) > f(z^{k^+})$ gefunden werden kann.

Für eine einfache Formulierung des Abbruchkriteriums sei (89) ergänzt durch die Bedingung

$$(90) \qquad d_i \neq d^{k^+-1} \qquad \text{für } 1 = 1,\ldots,n,$$

wobei k^+ als die fortlaufende Nummer desjenigen im Suchprozeß bisher aufgefundenen Punktes ist, für den gilt

$$(91) \qquad f(z^k) = \max_{1=1\ldots k} \left[\bar{f}(z^1)\right].$$

Das Abbruchkriterium lautet dann

$$(92) \qquad k = k^+ + n - 1 .$$

Das Verfahren erfüllt damit nicht die strenge Anpassungsbedingung von Zangwill's "Konvergenztheorem A"[1], wohl aber die gemilderte Anpassungsbedin-

1 Siehe W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 91.

gung in Zangwill's Konvergenztheorem B, C und D[1]. Dies wird einsichtig, wenn man eine Maximumfunktion $Z(z^k)$ wie folgt definiert:

$$(93) \qquad Z(z^k) = \max_{l=1\ldots k} \lfloor \bar{f}(z^l) \rfloor .$$

Unter Verwendung dieser Maximumfunktion kann k^+ auch definiert werden durch das Kriterium

$$(94) \qquad f(z^{k^+}) = Z(z^k) ,$$

und das Abbruchkriterium für den Suchprozeß der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs kann geschrieben werden als

$$(95) \qquad Z(z^k) = Z(z^{k-1}) \qquad \text{für } l=1,\ldots,n-1.$$

Endet der Suchprozeß mit nach Maßgabe von (89) bestimmter Richtung und Schrittweite nach dem Kriterium (92) bzw. (95), so stellt der Punkt z^{k^+} ein lokales Maximum[2] dar, es sei denn, es existiere ein dem Punkt z^{k^+} in einer "diagonalen" Richtung unmittelbar benachbarter Punkt[3] mit einem höheren Zielfunktionswert. Im Anschluß an den Suchprozeß ist daher noch ein Optimalitätstest in der Art des Abbruchkriteriums für die Methode des steilsten Anstiegs durchzuführen: Wenn

$$(96) \qquad \max_{d_j} \lfloor \bar{f}(z^{k^+} + d_j) \rfloor < f(z^{k^+})$$

gilt, wobei sich die Maximierung nur über alle $d_j \neq d_i$ für $i = 1,\ldots,n$ zu erstrecken braucht, so stellt z^{k^+} tatsächlich ein lokales Maximum dar. Andernfalls ist der Optimalitätstest auf den Punkt $z^{k^+} + d_{j+}$ erneut anzuwenden usw. Dies

1 Siehe W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 128, 241 bzw. 244.

2 Vgl. die Definitionen auf S.150.

3 Vgl. ebenda.

ist insbesondere dann notwendig, wenn z^{k+} in der Nähe einer spitzwinkeligen Ecke des Lösungsraumes liegt, die zulässige Punkte erhält, für die kein in einer koordinatenparallelen Richtung unmittelbar benachbarter Punkt existiert.

Zur Verringerung des Rechenaufwandes kann die folgende Ergänzung angebracht werden: Die Maximierung nach (89) braucht sich nur auf diejenigen Punkte zu erstrecken, die noch nicht in der bis zum Schritt $z^k \rightarrow z^{k+1}$ generierten Punktefolge enthalten sind, d.h. (89) ist durch die Bedingung

$$(97) \qquad z^k + \tau \cdot d_i \notin \left\{ z^l \right\}_{l=1}^{k}$$

zu ergänzen; denn eine Rückkehr zu einem früher generierten Punkt kann die Suche nach besseren Punkten nicht fördern.

Gelegentlich kann es vorkommen, insbesondere, wenn ein Punkt z^k in einer Ecke des Lösungsraumes liegt, daß nach Maßgabe der bisher angegebenen Regeln kein zulässiger neuer Punkt z^{k+1} gefunden werden kann. In diesem Falle ist in der Richtung d^{k-1} solange zurückzugehen, bis ein Punkt gefunden ist, von dem ausgehend eine andere Richtung zulässig ist. Existiert kein solcher Punkt (was wegen (97) durchaus vorkommen kann), so muß der Suchprozeß abbrechen.

Eine letzte ergänzende Anmerkung bezieht sich auf den Anwendungsbereich der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs. Enthält nämlich das zu berechnende Modell Nebenbedingungen der Art

$$(98) \qquad g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$$

wobei g eine beliebige Funktion und C eine Konstante bezeichnet, so scheitert die koordinatenparallele Suche, denn solche Nebenbedingungen können nur bei "diagonalen" Bewegungen durch den Lösungsraum eingehalten werden; mit der Veränderung des Niveaus einer einzigen Variablen würde sofort der Lösungsraum verlassen werden. Die Beschränkung der Richtungsauswahl auf die koordinatenparallelen Richtungen bedeutet also, daß die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs auf Modelle mit Nebenbedingungen in Gleichungsform nicht angewandt werden kann. Sie bedeutet aber n i c h t eine Beschränkung des Anwendungsbereiches in Bezug auf Entscheidungssituationen mit bestimmter Struktur.

Eine Entscheidungssituation, die in einem Modell mit Nebenbedingungen der Art (98) abgebildet ist, kann nämlich auch in einem anderen Modell, das solche Nebenbedingungen nicht enthält, adäquat abgebildet werden. Und zwar kann eine Nebenbedingung der Art (98) durch den folgenden Zusatz zur ursprünglichen Zielfunktion ersetzt werden (Zielfunktion u n d Lösungsraum werden anders erfaßt):

$$(99)\quad -\mathcal{M}\cdot\lceil \| g(x_1,x_2,\ldots,x_n)-C \|\rfloor \quad .$$

Dabei bedeutet $\mathcal{M}$ eine sehr große Zahl. Ist sie groß genug angesetzt, so bewirkt dieses fiktive "Strafkosten"-Glied, daß als optimale Modellösung kein Punkt erscheinen kann, der im ursprünglichen Problem unzulässig ist. Ist z.B. in einem Gewinnmaximierungsproblem der höchstmögliche Erlös e = 100, so wird bei $\mathcal{M} > 100$ der gesamte Erlös durch die Strafkosten aufgezehrt, sobald von der Gleichheits-Nebenbedingung abgewichen wird. Der Umstand, daß der Wert dieses Strafkostengliedes proportional mit dem Ausmaß der Verletzung der (zu beachtenden, aber bei der Modellformulierung eliminierten) Nebenbedingung wächst, bewirkt, daß von einem im

Verlauf der Rechnung generierten unzulässigen Punkt aus der größte Anstieg des Wertes der (erweiterten) Zielfunktion stets durch eine Bewegung in Richtung auf die Einhaltung der Nebenbedingung erreicht wird[1].

c Bemerkungen zum Rechenaufwand

Der Rechenaufwand zur Bestimmung eines (lokalen) Maximums nach der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs kann sehr groß sein, denn in jedem Iterationsschritt sind für n-1 Richtungen und alle in den einzelnen Richtungen zulässigen Schrittweiten die Zielfunktionswerte der so erreichbaren Punkte zu berechnen. Dennoch kann die Anzahl der erforderlichen Zielfunktionsberechnungen geringer sein als bei der Methode des steilsten Anstiegs, insbesondere bei Problemen mit einer großen Anzahl von Variablen und relativ kleiner zulässiger Variationsbreite bei den einzelnen Variablen, da in solchen Problemen bei der Methode des steilsten Anstiegs die Anzahl der zulässigen Richtungen für den Rechenaufwand relativ besonders hoch zu Buche schlägt. (Der Unterschied bei der Anzahl der zu prüfenden Richtungen, 3^n-n, ist ja umso größer, je größer n ist.) Im Vergleich zur Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs kann mit schnellerer Konvergenz, gemessen in der Anzahl der Iterationsschritte, eine Verminderung des Rechenaufwandes erwartet werden. Der Rechenaufwand der Methode des steilsten Koordi-

---

1 Zum Strafkostenkonzept vgl. M. Bellmore - H.J. Greenberg - J.J. Jarvis, Generalized Penalty - Function Concepts in Mathematical Optimization, Operations Research, Band 18, 1970, S. 229-252. Siehe dazu ferner W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 248 ff.

natenanstiegs kann daher grundsätzlich größer oder kleiner als der (oder gleich dem) der Methode des steilsten Anstiegs und/oder der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs sein.

IV Zusatzregeln für die Anwendung von Methoden zulässiger Richtungen auf nichtlineare ganzzahlige Programmierungsprobleme

1 Die Art der Zusatzregeln

Im folgenden sollen zwei Zusatzregeln für die Anwendung von Methoden zulässiger Richtungen im oben dargestellten Sinne entwickelt werden. Dabei bezieht sich der Verfasser allerdings explizit nur auf die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs, doch können die Gedanken grundsätzlich, in analoger Weise, auch auf die Methode des steilsten Anstiegs, auf die Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs und auf andere Suchalgorithmen, die bei nicht-konkaven Problemen nur "lokale Algorithmen"[1] sind, angewandt werden.

Und zwar sei zunächst ein "Schrittweitenalgorithmus" vorgeschlagen, der im Prinzip darin besteht, daß, von einer starken Vergröberung des gestellten Problems ausgehend, in sukzessiver Verfeinerung ein lokales Maximum des gegebenen Problems immer genauer approximiert wird.

---

1 Der Ausdruck wurde übernommen von R. Pfranger, Ein heuristisches Verfahren ..., a.a.O. Er bezeichnet die Regeln, die zur Auffindung eines lokalen Optimums geeignet sind. Das Gegenstück ist ein "globaler Algorithmus", mit dem die Bemühungen um das Auffinden eines globalen Optimums beschrieben werden.

Alsdann sei Pfrangers Idee von einem "globalen Algorithmus"[1] aufgegriffen und in Verbindung mit dem Schrittweitenalgorithmus auf den Suchalgorithmus der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs übertragen.

2 Der Schrittweitenalgorithmus

Der Grundgedanke des im folgenden vorzuschlagenden "Schrittweitenalgorithmus" basiert darauf, daß es, sofern die Zielfunktion nicht gerade den Charakter einer Zuordnung von Zufallszahlen zu den einzelnen Lösungspunkten trägt, oder, positiv ausgedrückt, sofern in der Zielfunktion über mehr oder weniger große Intervalle (kontinuierliche) Gesetzmäßigkeiten bestehen, möglich sein muß, ein gegebenes Problem in vergröberter Form[2] approximativ zu lösen.

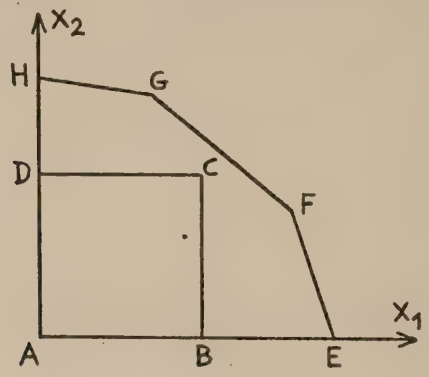


Abbildung 4

1 R. Pfranger, Ein heuristisches Verfahren ..., a.a.O.

2 Die Vergröberung betrifft hier, das sei ausdrücklich angemerkt, nicht etwa die Struktur-Informationen, sondern ausschließlich die numerischen Informationen zu dem anstehenden Problem.

Zum Beispiel stelle in Abb. 4 die von dem Streckenzug AEFGH umschlossene Fläche den zulässigen Lösungsraum eines gegebenen Problems dar. Bestimmt man die Werte der Zielfunktion für die Eckpunkte des Quadrats ABCD, so liegt die Vermutung nahe, daß derjenige dieser Punkte, der den höchsten Zielfunktionswert aufweist, am nähesten bei einem (lokalen) Maximum liegt. Angenommen, der Punkt C habe den höchsten Zielfunktionswert, so stellt C eine erste Approximation für ein lokales Maximum über den Lösungsraum AEFGH dar. Für eine bessere Approximation braucht dann nur noch die Umgebung des Punktes C abgesucht zu werden[1]. Zur Formalisierung dieses Ansatzes seien zunächst die Begriffe des vergröberten Lösungsraumes $V_{k'}$ und der Basisschrittweite $\sigma_{k'}$ eingeführt.

$V_{k'}$ bezeichne diejenigen zulässigen Punkte, die Knotenpunkte eines Gitternetzes über den ursprünglichen Lösungsraum mit dem Gitterlinienabstand $\sigma_{k'}$, also Schnittpunkte von jeweils n im Abstand $\sigma_{k'}$ zueinander über den ursprünglichen Lösungsraum V gezogenen Gitterlinien sind. Die Ganzzahligkeitsbedingung, die hier durchweg unterstellt wird, besagt übrigens, daß auch der ursprüngliche Lösungsraum V nur aus Knotenpunkten eines Gitternetzes, und zwar mit dem Gitterlinienabstand $\sigma_K = 1$, über dem durch die übrigen Nebenbedingungen begrenzten Raum besteht ($V = V_K$).

$\sigma_{k'}$ ist die in der k'-ten Approximationsstufe geltende Basisschrittweite. Als in der k'-ten Approximationsstufe anzuwendende Schrittweiten sollen nur ganzzahlige Vielfache der Basisschrittweite, und

---

1 Auf dem gleichen Gedanken basieren im Prinzip die unimodalen Suchverfahren wie z.B. Fibonacci-Suche und Bolzano-Suche. Vgl. W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 120 ff.

zwar $\tau = \tau' \cdot \sigma_k$, mit $\tau' = -2, -1, 1, 2$ in Betracht kommen. Die Anzahl der in jedem Iterationsschritt erforderlichen Zielfunktionsberechnungen beträgt dann maximal $4n$.[1] Allerdings kann die Anzahl der Iterationsschritte unnötig groß werden, dann nämlich, wenn eine Approximation mit $\sigma_{k'} > \sigma_K = 1$ zufällig bereits ein exaktes Optimum geliefert hat, ohne daß dies als solches erkannt worden ist.

Wie aber soll die Folge der sukzessive anzuwendenden Basisschrittweiten σ festgelegt werden? Die größte Schrittweite, mit der man von einem gegebenen Anfangspunkt z^1 noch zu einer zulässigen Lösung $z^2 \in V$ gelangen kann, ist der größte über alle i vorkommende Abstand zwischen dem Anfangspunkt z^1 und der Grenze des Lösungsraumes, gemessen in den koordinatenparallelen Richtungen d_i. Verlangt man, was hier geschehen soll, daß von Approximationsstufe zu Approximationsstufe die Basisschrittweite jeweils halbiert werden soll und im letzten Suchabschnitt $\sigma = 1$ sein soll, so kommt als erste Basisschrittweite σ_1 diejenige Zweierpotenz in Betracht, die dem größten Abstand zwischen Ausgangspunkt und Grenze des Lösungsraumes am nächsten kommt. Es gelte also:

(100) $\sigma_{k'} = 2^{K-k'}$ für $k' = 1,\ldots,K$

mit $K = \max(K_i')$, wobei K_i' so festgelegt ist, daß

$z^1 + 2^{K_i'-1} \cdot d_i \in V$ und $z^1 + 2^{K_i'} \cdot d_i \notin V$

oder

$z^1 - 2^{K_i'-1} \cdot d_i \in V$ und $z^1 - 2^{K_i'} \cdot d_i \notin V$ gilt.

---

1 Bei $k > 1$ ist die erforderliche Anzahl der Zielfunktionsberechnungen pro Schritt maximal $4 \cdot (n-1)$, bei $k = k^+ + 1$ nur noch $4 \cdot (n-1)$.

Wendet man nun die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs mit der Beschränkung auf die Schrittweiten $\tau = \tau' \cdot \sigma_{k'}$ mit $\tau' = -2, -1, 1, 2$ (soweit zulässig) auf sukzessive näher den ursprünglichen Lösungsraum V approximierende vergröberte Lösungsräume $V_{k'}$ an, indem man in jedem Suchabschnitt k' den Abbruchpunkt des vorausgegangenen Suchabschnittes $z^{k^+}(V_{k',-1})$ als Anfangspunkt benutzt, so wird mit $z^{k^+}(V_{k'})$ ein lokales Maximum über $V = V_K$ sukzessive näher approximiert. Auf den im letzten Suchabschnitt unter Anwendung der Basisschrittweite $\sigma_K = 2^{K-K} = 1$ determinierten Abbruchpunkt $z^{k^+}(V_K)$ ist schließlich der Optimalitätstest (96) anzuwenden, der diesen Punkt als lokales Maximum bestätigt oder einen besseren Punkt angibt[1].

Durch die sukzessive Approximation des Optimums und durch die Beschränkung der Suche auf eine engere Umgebung des Anfangspunktes eines jeden Suchabschnittes (indem nur die Schrittweiten $\tau = -2\sigma_{k'}$; $\tau = -1\sigma_{k'}$; $\tau = +1\sigma_{k'}$ und $\tau = +2\sigma_{k'}$ in Betracht gezogen werden) kann eine erhebliche Ersparnis an Rechenaufwand erreicht werden, wenn die Variationsbreite der einzelnen Variablen relativ groß ist[2]. Die evtl. mögliche Erhöhung der Anzahl der Iterationsschritte wird dann dadurch kompensiert, daß ohne Anwendung des Schrittweitenalgorithmus für wesentlich mehr Alternativen für die mit einem Schritt anzusteuernden Punkte der Wert der Zielfunktion zu berechnen wäre.

---

1 Mit dem Schrittweitenalgorithmus werden übrigens auch kontinuierliche Probleme der beliebig genau approximierenden Lösung durch die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs zugänglich, wenn man die Anzahl der Suchabschnitte mit sukzessiver Halbierung der Basisschrittweite $\sigma_{k'}$ über K hinauslaufen läßt ($\sigma_K=1$; $\sigma_{K+1} = \frac{1}{2}$; $\sigma_{K+2} = \frac{1}{4}$; ...; $\sigma_\infty = 0$).

2 Diese Aussage gilt natürlich nicht, wenn zufällig in einer k'-ten Approximationsstufe mit $k' < K$ (also $\sigma_{k'} > 1$) ein lokales Maximum über V bereits determiniert wird, ohne daß man dies erkennt.

3 Ein "globaler" Algorithmus

a Die gemeinsamen Mängel der beschriebenen Methoden

Unbefriedigend an allen bisher genannten Optimierungsverfahren ist die Tatsache, daß sie bei einem einmal gefundenen lokalen Optimum stehen bleiben, bzw. daß nur unter der einschränkenden Voraussetzung, daß die Zielfunktion im zulässigen Lösungsraum nicht mehr als ein lokales Optimum aufweist, bewiesen werden kann, daß das Ergebnis tatsächlich die beste aller zulässigen Lösungen darstellt.

"Es ist .. noch nicht gelungen, das Optimierungsproblem ohne die Voraussetzung der Konvexität[1] zu lösen, d.h. eine nichtkonvexe Funktion global zu minimieren. Man muß sogar fürchten, daß sich das Problem in allgemeiner Form gar nicht mathematisch exakt lösen läßt".[2] "Konvergenzbeweise lassen sich nur führen, wenn über den zulässigen Bereich strenge Voraussetzungen (z.B. Pseudokonvexität[3], Grad der Funktion, Separierbarkeit, ...) gemacht werden. Entscheidend ist aber nun, daß es bei einem in der Praxis vorgelegten Problem meist äußerst schwierig oder unmöglich ist, solche Voraussetzungen zu verifizieren, und daß sie zu sehr einschränken".[4] Und: "Es gibt viele theoretisch sauber bewiesene Verfahren, die in der Praxis versagen, weil sie sich nicht auf dem Computer realisieren lassen"[5]. Die

---

1 Bei Maximierungsproblemen tritt an die Stelle der Voraussetzung der Konvexität die der Konkavität.

2 R. Pfranger, Ein heuristisches Verfahren ..., a.a.O., S. 27.

3 Die Voraussetzung der Pseudokonvexität ist weniger streng als die der Konvexität, denn im Gegensatz zu letzterer läßt sie Wendepunkte (die aber keine Sattelpunkte sein dürfen) zu. Vgl. W.I. Zangwill, Nonlinear Programming, a.a.O., S. 28.

4 R. Pfranger, Ein heuristisches Verfahren ..., a.a.O., S. 28.

5 Ebenda.

einzige sichere Möglichkeit, in einem beliebig-nichtlinearen ganzzahligen Problem das globale Optimum zu bestimmen, ist theoretisch die vollständige Enumeration aller zulässigen Lösungen, die aber wegen deren oft unübersehbar großen Anzahl praktisch nicht in Frage kommt. Vor allem aus diesen Gründen haben heuristische Ansätze, mögen sie auch den Mathematiker nicht befriedigen, in der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre ihre Berechtigung[1].

b Pfrangers Idee des "globalen Algorithmus"

Ein geeigneter heuristischer Ansatz zur globalen Optimierung wird hier in dem Konzept des "globalen Algorithmus" von Pfranger[2] gesehen.

"Weil das Problem der globalen Optimierung ... von großer praktischer Bedeutung ist"[3], es andererseits aber noch nicht gelungen ist, eine Lösungsmethode für Optimierungsprobleme mit mehreren lo-

---

1 Im übrigen sei der Hinweis gestattet, daß auch in bekannten Bereichen der Unternehmensforschung nicht alles bewiesen ist. Sogar ein so geläufiges Optimierungsprinzip wie "... the dynamic programming approach is more heuristic then rigorous ... only certain aspects of the theory are rigorously proven ... while in the remaining cases dynamic programming is still an intuitive approach". (W.I. Zangwill, Buchbesprechung zu St.E. Dreyfus, Dynamic Programming and the Calcules of Variations, New York (N.Y.) 1965, Management Science, Serie C, Band 13, 1967, S. 33-35, hier S. 35.) Auch bei den Branch-and-Bound-Methoden scheint bisher nur eine spezifische Branching-Regel (nämlich die Fibonacci-Teilung der als Branch-and-Bound-Methode interpretierbaren Fibonacci-Suche) als optimal beweisbar zu sein. (Vgl. L.G. Mitten, Branch-and-Bound Methods, a.a.O., S. 31.)

2 R. Pfranger, Ein heuristisches Verfahren ..., a.a.O.

3 Ebenda, S. 27.

kalen Maxima zu finden, entwickelt Pfranger ein "heuristisches Verfahren zur globalen Optimierung".

Das Verfahren basiert zunächst auf einer Weiterentwicklung des Schnittebenen-Verfahrens von Kleibohm[1] und der Modified Feasible-Directions-Method von Zoutendijk[2]. Diese ist geeignet, ein lokales Optimum zu bestimmen, von dem man allerdings nicht weiß, ob es gleichzeitig das globale Optimum (das "beste" der lokalen Optima) darstellt.

Der Grundgedanke Pfrangers besteht nun darin, dieses Verfahren, das er als "lokalen Algorithmus" bezeichnet, in einen "globalen Algorithmus" einzubetten[3]. Dieser besteht darin, daß der lokale Algorithmus wiederholt zum Einsatz kommt, so daß er in jeder Stufe in den "Einzugsbereich" eines anderen lokalen Optimums kommt, und "mit zunehmender Rechenzeit mit immer größerer Wahrscheinlichkeit das globale Minimum[4] bestimmt wird"[5]. Über das Ausmaß der Zunahme der Wahrscheinlichkeit mit der Rechenzeit (genauer mit zunehmender Häufigkeit der Anwendung des lokalen Algorithmus) lassen sich allerdings keine generellen Aussagen machen; und die Wahrscheinlichkeit wird erst zur vollkommenen Sicherheit, wenn schließlich alle Lösungen enumeriert worden sind.

---

1 K. Kleibohm, Ein Verfahren zur approximativen Lösung von konvexen Programmen, Dissertation, Zürich 1966.

2 G. Zoutendijk, Nonlinear Programming: A Numerical Survey, SIAM Journal on Applied Mathematics, Band 4, 1966, S. 194-210 (zitiert nach Pfranger).

3 Vgl. R. Pfranger, Ein heuristisches Verfahren ..., a.a.O., S. 28.

4 Es ist zu beachten, daß Pfranger sich in seiner Darstellung auf Minimierungsprobleme bezieht. Wegen der Äquivalenz von Minimierung einer Funktion und Maximierung derselben Funktion mit umgekehrten Vorzeichen ist das Verfahren jedoch ohne weiteres auf Maximierungsprobleme übertragbar; der Voraussetzung der Konvexität entspricht dann die umgekehrte Voraussetzung der Konkavität.

5 R. Pfranger, a.a.O., S. 27.

Andererseits kann man davon ausgehen, daß es in betriebswirtschaftlichen Entscheidungsproblemen nur eine relativ geringe Anzahl von lokalen Maxima gibt[1], so daß die "Wahrscheinlichkeit" dafür, daß das globale Optimum gefunden wird, innerhalb vertretbarer Rechenzeit praktisch zur Sicherheit wird. Im übrigen kann durchaus ein lokales Optimum eines exakt (im Sinne der Erfassung aller Struktur-Informationen) formulierten Modells eine bessere Entscheidungshilfe darstellen als die Lösung eines von vornherein von der tatsächlichen Problemstruktur abstrahierenden Modells, das an sich in exakter und beweisbarer Weise zu lösen sein mag[2].

Pfrangers Idee des "globalen Algorithmus" bzw. der wiederholten Anwendung eines "lokalen Algorithmus" scheint daher richtungweisend für die Behandlung nicht-konvexer bzw. nicht-konkaver Probleme zu sein. Da aber für seinen lokalen Algorithmus Stetigkeit von Zielfunktion und Nebenbedingungen vorausgesetzt werden muß[3], diese aber in betriebswirtschaftlichen Problemen häufig nicht gegeben ist, sei diese Idee im folgenden auf die mit dem Schrittweitenalgorithmus erweiterte Methode des steilsten Koordinatenanstiegs übertragen.

---

1 Die Anzahl der lokalen Maxima wird umso geringer sein, je regelmäßiger die in der Zielfunktion zum Ausdruck kommenden Gesetzmäßigkeiten sind. Praktisch wird eine vollständige Enumeration nur dann erforderlich sein, wenn sie etwa aus einer Zuordnung von Zufallszahlen zu den einzelnen Lösungspunkten besteht.

2 Vgl. Abschnitt B II 1 (S. 14 ff.) dieser Arbeit.

3 Siehe R. Pfranger, a.a.O., S. 28.

c Ein "globaler Algorithmus" für die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs

Die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs, ergänzt um den vorstehend beschriebenen Schrittweitenalgorithmus, läßt sich durch Erweiterung des letzteren leicht in einen globalen Algorithmus einbetten. Und zwar wird der Einzugsbereich[1] des bei einmaliger Anwendung des Verfahrens (lokaler Algorithmus) in sukzessive verfeinerter Approximation determinierten lokalen Maximums verlassen, wenn von diesem ausgehend die Suche nach einem besseren Punkt mit erneut vergrößerter Basisschrittweite fortgesetzt wird.

Die Folge der sukzessive anzuwendenden σ-Werte soll also verlängert werden. Und zwar soll hier als nächster σ-Wert $\sigma_{K+1} = \frac{1}{2}\sigma_1 = 2^{K-2}$, also die halbe Basisschrittweite der ersten Approximationsstufe des ersten Suchabschnittes (= erste Anwendung des lokalen Algorithmus) angesetzt werden. Diese Festsetzung ist natürlich in gewisser Weise willkürlich. Ihr liegen aber zwei Überlegungen zugrunde. Einerseits wird der Einzugsbereich eines lokalen Maximums umso sicherer verlassen, je größer die Schrittweite gewählt wird; andererseits würde die Rückkehr auf die ursprüngliche Basisschrittweite $\sigma_1 = 2^{K-1}$ (ohne Einführung eines zusätzlichen Abbruchkriteriums) zu einer unendlichen Folge von Anwendungen des lokalen Algorithmus (bzw. in Ansehung von (97) bis zur Vollenumeration) führen.

---

1 Ein Punkt y liegt im Einzugsbereich eines lokalen Maximums, so sei definiert, wenn der Suchalgorithmus von y ausgehend auf dieses lokale Maximum konvergiert.

Wird zu Beginn des zweiten Suchabschnittes der Einzugsbereich des im ersten Suchabschnitt aufgefundenen lokalen Maximums verlassen, so wird durch die Fortsetzung der Suche mit der Basisschrittweite $\sigma_{K+1} = 2^{K-2}$, sofern vorhanden, ein weiteres lokales Maximum approximiert und, bei anschließender wiederholter Halbierung der Basisschrittweite bis auf den Wert $\sigma_{2K-1} = 2^{2K-1-k'}=1$ genau determiniert. Der nächste (dritte) Suchabschnitt beginnt mit dem im zweiten Suchabschnitt determinierten lokalen Maximum als Anfangspunkt und der Basisschrittweite $\sigma_{2K} = 2^{K-3}$ und wird mit sukzessiver Halbierung der Basisschrittweite fortgesetzt.

Diese abwechselnde Verkleinerung und Vergrößerung der Basisschrittweite wird solange fortgesetzt, bis

$$(101) \qquad k' = \sum_{\mathcal{R}=0}^{K} (K-\mathcal{R}) - 1 = \frac{(K+1)\cdot K}{2} - 1,$$

wobei wieder $\sigma_{k'} = 1$ ist.

Beispiel: $K = 4$; $\sigma_1 = 2^{4-1} = 8$

Der Endwert für k' errechnet sich als

$$k' = \frac{(4+1)\cdot 4}{2} - 1 = 9$$

Die vollständige Folge der σ-Werte lautet:

k'	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma_{k'}$	8	4	2	1	4	2	1	2	1

Die Anzahl der insgesamt zu durchlaufenden Suchabschnitte ist maximal (d.h. wenn man die Rechnung nicht schon vorher wegen Überschreitung einer vertretbaren Rechenzeit oder, weil man Grund zu der Annahme hat, daß man das globale Optimum bereits gefunden hat, abbricht) K - 2. Diese Anzahl ergibt sich wie folgt: Ein neuer Suchabschnitt wird jeweils dann begonnen, wenn ein Suchabschnitt abgelaufen ist u n d bei Beginn des abgelaufenen Suchabschnittes $\sigma > 2^1$ war. Wenn nämlich zu Beginn des abgelaufenen Suchabschnittes $\sigma = 2$ war, würde ein neuer Suchabschnitt mit halbierter Basisschrittweite, nämlich $\sigma = 1$ nicht den Einzugsbereich des letzten lokalen Maximums verlassen. Die Halbierung des σ-Wertes ist aber gleichbedeutend mit der Verringerung des Exponenten zur Basis 2 um eine Einheit; und eine ganze Zahl x kann gerade x - 1 mal um 1 verringert werden, bis der Wert 1 erreicht wird. Der Exponent in 2^{K-1}, dem Anfangswert für σ kann also (K-1)-1 = K-2 mal um 1 verringert werden, bis σ den Wert 2^1 hat; die maximale Anzahl der Suchabschnitte ist also K-2.

Wenn der lokale Algorithmus K-2 mal angewandt worden ist, endet der Suchprozeß. Kann man nun erwarten, daß das durch Enumeration unter den lokalen Maxima der einzelnen Suchabschnitte zu bestimmende Maximum Maximorum identisch mit dem globalen Maximum des gegebenen Problems ist? Dies kann sicher nicht generell bewiesen werden, doch spricht nach Ansicht des Verfassers einiges dafür: Zwar nicht im Sinne einer logischen Gesetzmäßigkeit, aber wohl doch im Sinne einer statistischen Korrelation kann man sagen, daß die Anzahl der lokalen Maxima einer gegebenen Funktion im zulässigen Lösungsraum u.a. von der Ausdehnung des Lösungsraumes abhängig ist. Andererseits ist auch die Anzahl der Suchabschnitte (entsprechend der Bestimmung von K) unmittelbar von der Ausdehnung des Lösungsraumes abhängig.

Je größer also die zu erwartende Anzahl der lokalen Maxima des Problems ist, desto größer ist tendenziell auch die Anzahl der mit dem Verfahren aufgefundenen lokalen Maxima. Ferner wird der Einzugsbereich des globalen Maximums meist größer sein als der eines niedrigen lokalen Maximums (es sei denn, es handele sich bei dem globalen Maximum um einen extrem "steilen Gipfel" des "Zielfunktionsgebirges"), so daß in jedem einzelnen Suchabschnitt die Wahrscheinlichkeit der Konvergenz auf das globale Maximum größer ist als die der Konvergenz auf ein niedriges lokales Maximum. Aus diesen Gründen, die zwar - dessen ist sich der Verfasser bewußt - einen Beweis nicht ersetzen können, die aber im Sinne tendenzieller Plausibilitätsaussagen nicht unberechtigt sein dürften, kann man erwarten, daß sich das globale Maximum unter den aufgefundenen lokalen Maxima befindet[1].

V Illustration und Vergleich der iterativen Suchverfahren

1 Die Schwierigkeiten des Vergleichs

Neben der Entwicklung von Methoden der Wirtschaftlichkeitsrechnung verlangt die Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre, die ja den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildete, auch die Herausarbeitung von Empfehlungen an die Unternehmungspraxis[2]. Im Hinblick auf die Struktur des Entscheidungsprozesses wurde hierauf bereits im Abschnitt B II 1 eingegangen. Im Hinblick auf die Methode der Wirtschaftlichkeitsrechnung wäre eine Gegenüberstellung alternativer Verfahren erforder-

1 Bei den vom Verfasser geprüften Beispielen wurde diese Erwartung jedenfalls nicht widerlegt.

2 Vgl. H. Koch, Die Theorie der Unternehmung ..., a.a.O., S. 433.

lich. Konkret ist hier zu fragen, ob die Anwendung der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs bei der Lösung unternehmerischer Entscheidungsprobleme empfohlen werden kann.

Was den Vergleich zwischen den im Teil B genannten Optimierungsverfahren und den in den vorangegangenen Abschnitten dieses Teils (D) behandelten iterativen Suchverfahren angeht, so wurde diese Frage weiter oben bereits beantwortet. Im folgenden geht es daher nur noch um den Vergleich der hier beschriebenen iterativen Suchverfahren im Hinblick auf die Güte des Ergebnisses (bei gegebenem Rechenaufwand) und im Hinblick auf den Rechenaufwand bei gleichen Ergebnissen.

Hierüber aber sind generelle Aussagen nicht möglich. Der Vergleich kann nur in konkreten Einzelfällen in Form einer ex post durchzuführenden Wirtschaftlichkeitsrechnung über die Wirtschaftlichkeitsrechnung eine klare Aussage ergeben. Wegen unüberwindlicher informatorischer Schwierigkeiten ist nämlich eine ex-ante-Wirtschaftlichkeitsrechnung, wie weiter oben dargelegt wurde, nicht möglich. Auch aufgrund umfangreicher Erfahrungen, die dem Verfasser begreiflicherweise noch nicht vorliegen, kann bestenfalls eine Aussage im statistischen Sinne gewonnen werden[1], deren Wert für den konkreten Einzelfall durchaus bestreitbar ist. Die relative Häufigkeit von günstigen Fällen für ein bestimmtes Optimierungsverfahren, die sich in

---

1 Vgl. J.F. Shapiro, Dynamic Programming Algorithms for the Integer Programming Problem, Teil I: The Integer Programming Problem viewed as a Knapsack Type Problem, Operations Research, Band 16, 1968, S. 103-121, hier S. 117; vgl. auch B. Korte - W. Krelle - W. Oberhofer, Ein lexikographischer Suchalgorithmus ..., a.a.O., S. 181.

einer Reihe von konkreten (vergangenen) Anwendungen gezeigt haben mag, besagt nichts über den zu erwartenden Erfolg in einer neuen konkreten Anwendung (Prognosewert von statistischen Wahrscheinlichkeiten).

Zwar erscheint es selbstverständlich, daß Optimierungsverfahren, die auf ganz spezielle Voraussetzungen bezüglich der Problemstruktur abstellen, so daß ihnen nur ganz einfach strukturierte Probleme zugänglich sind, geringeren Rechenaufwand zur Lösung des Problems erfordern als Verfahren, deren Voraussetzungen ihnen auch kompliziertere Probleme zugänglich machen. Darüber hinaus kann man sagen, daß ein Optimierungsverfahren in der Tendenz umso komplizierter ist, je universeller sein Anwendungsbereich ist[1].

Besteht z.B. das Problem in der Ermittlung des Maximums einer (pseudo-)konkaven differenzierbaren Funktion einer einzigen Variablen und gibt es keinerlei Beschränkungen bezüglich des Lösungsraumes, so ist die Lösung einfach durch Auflösen einer einzigen Gleichung ($\frac{\partial f}{\partial x} = 0$) zu bestimmen. Ist die Funktion nicht pseudokonkav, so erhöht sich der Rechenaufwand; es sind mehrere Lösungen der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ zu vergleichen.

Indessen ist der Rechenaufwand nur eine der Größen, die in einer Wirtschaftlichkeitsrechnung über die Wirtschaftlichkeitsrechnung zu erfassen wären, so daß die "Bewertung" eines Optimierungsverfahrens

---

1 Z.B.: "... dynamic programming is a concept that gains practical implications as its domain of application is narrowed. It shares this property with all other mathematical concepts that have ever been proposed." R.A. Howard, Dynamic Programming, a.a.O., S. 348.

im Einzelfall nur originär erfolgen kann, und daß als einzige allgemeine Aussage nur möglich ist: Ein Optimierungsverfahren (sei es beweisbar oder trage es auch nur heuristischen Charakter) hat solange seine Berechtigung, wie Fälle nachweisbar sind, in denen es weniger Rechenaufwand erfordert und/oder zu besseren Ergebnissen führt als alle anderen Verfahren[1].

Für diesen Nachweis genügen Beispiele. Im folgenden seien daher ein grafisches und ein numerisches Beispiel behandelt, in denen herkömmliche Optimierungsverfahren versagen und die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs i.V.m. dem Schrittweitenalgorithmus sich als das leistungsfähigste der iterativen Suchverfahren erweist. Zur Messung des Rechenaufwandes möge dabei als Hilfsmaßstab die Anzahl der Zielfunktionsberechnungen bzw. die Anzahl der Punkte, für die der Wert der Zielfunktion zu berechnen ist, dienen[2].

Die Beispiele mögen gleichzeitig dazu dienen, die Funktionsweise der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs zu illustrieren.

2 Ein grafisches Beispiel

In den folgenden Abbildungen ist jeweils das gleiche Bild von Linien gleicher Zielfunktionswerte einer nichtkonkaven Funktion über einen nichtkonvexen Lösungsraum zu sehen[3]. Die (allein zulassigen)

1 Dies ist letztlich auch der Grund für die unüberschaubare Fülle und Vielfalt der Literatur zur Unternehmensforschung.

2 So auch bei F. Brioschi - Sh. Even, Minimizing the Number of Operations ..., a.a.O., S. 69.

3 Das Beispiel wurde, was die Struktur anbetrifft, übernommen von H.C. Joksch, Lineares Programmieren, a.a.O., S. 177.

ganzzahligen Punkte sind als Schnittpunkte der eingezeichneten Gitterlinien zu erkennen. Ferner sind in den Abbildungen die Punkte, für die die Zielfunktion zu berechnen ist, durch kleine Kreise (∘) und die Punkte, die als Iterationspunkte z^k ausgewählt werden, durch ausgefüllte kleine Kreise (•) gekennzeichnet. Pfeile (→) deuten die Richtung der Iterationsschritte an. In allen Fällen wurde als Anfangspunkt $z^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gesetzt.

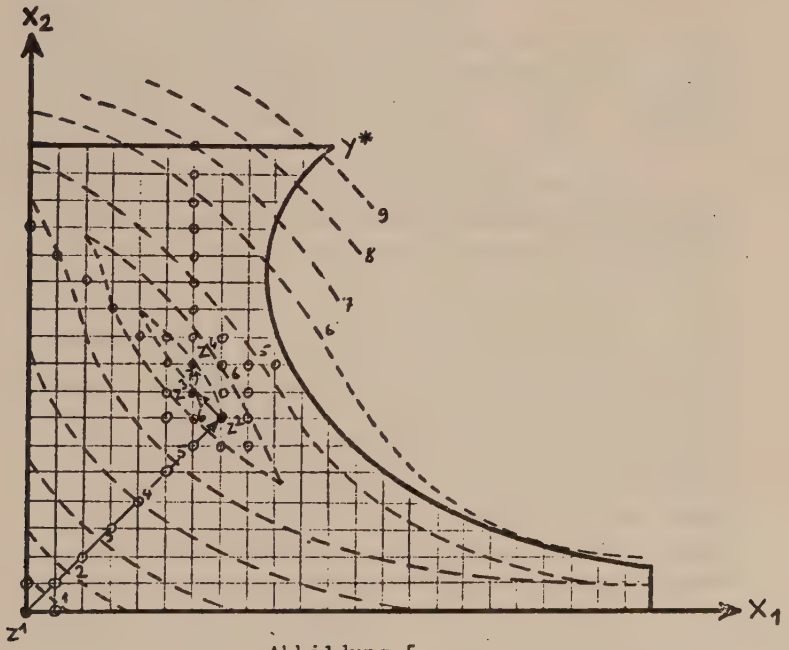


Abbildung 5

Abbildung 5 zeigt den Suchprozeß nach der Methode des steilsten Anstiegs in der oben beschriebenen Version. Zur Bestimmung der optimalen Richtung im ersten Schritt sind die $z^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ benachbarten Punkte $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu prüfen. Der höchste Zielfunktionswert wird bei

$y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $f(y_3) > 1$ erreicht. $d_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stellt als die optimale Richtung für den ersten Schritt dar. Zur Bestimmung der optimalen Schrittweite sind die Zielfunktionswerte aller in dieser Richtung liegenden Punkte

$$y_3 = z^1 + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bis } y_{11} = z^1 + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

zu vergleichen. Den höchsten Zielfunktionswert weist

$$y_9 = z^1 + 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ mit } 6 < f(y_9) < 7 \text{ auf.}$$

$y_9 = z^2$ wird also Ausgangspunkt für den zweiten Schritt. Die Prüfung der z^2 benachbarten Punkte

$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

ergibt als optimale Richtung $d^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und aus dem Vergleich aller von z^2 ausgehend in dieser Richtung liegenden Punkte $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}$ erhält man $z^3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ als optimalen neuen Punkt mit $f(z^3) = 7$. In entsprechender Weise wird im dritten Schritt $z^4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $f(z^4) > 7$ bestimmt. Der Versuch, die optimale Richtung für einen vierten Schritt zu bestimmen, zeigt schließlich, daß keiner der z^4 benachbarten Punkte einen höheren Zielfunktionswert aufweist, daß es sich bei z^4 also um ein (lokales) Maximum handelt. Zur Bestimmung dieses lokalen Maximums waren in drei Schritten für 39 Punkte die Zielfunktionswerte abzulesen.

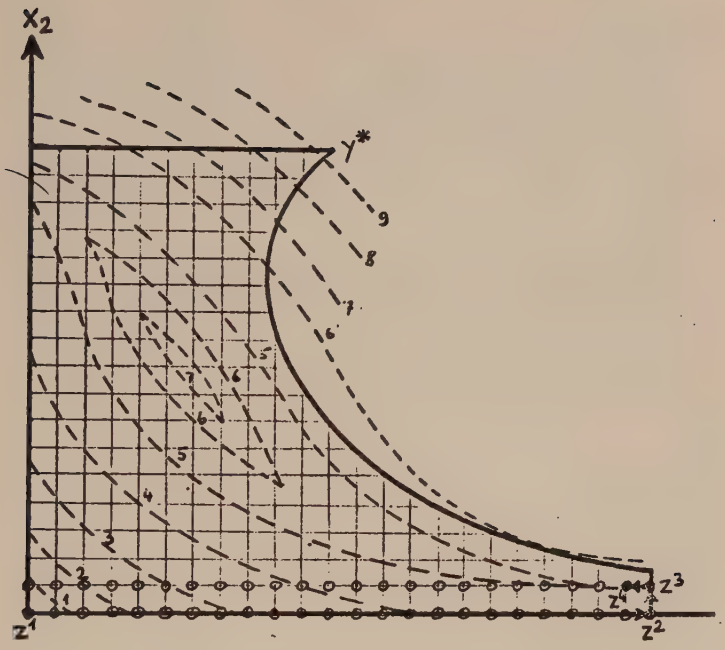


Abbildung 6

Bei der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs beginnt der Suchprozeß mit dem Vergleich aller Punkte, die von z^1 ausgehend in der Richtung $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen. Optimal ist der Punkt $z^2 = \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $4 < f(z^2) < 5$. Für den zweiten Schritt kommt nur der Punkt $z^3 = z^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $f(z^3) = 5$ in Betracht. Im dritten Schritt ist für die Richtung $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die optimale unter den zulässigen Schrittweiten $\tau = 0, \tau = -1, \ldots, \tau = -23$ bei $\tau = -1$ zu finden. Für den Zielfunktionswert des neuen Punktes $z^4 = z^3 - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $5 < f(z^4) < 6$. Da sich im nächsten Schritt in der Richtung $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die

Schrittweite $\tau = 0$ als optimal erweist, endet der Suchprozeß bei z^4. Es waren für 48 Punkte die Zielfunktionswerte abzulesen. Das relativ schlechte Ergebnis des Suchprozesses ist natürlich dadurch bedingt, daß einerseits der Anfangspunkt $z^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und andererseits die Anfangsrichtung $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ungünstig gewählt sind. Wie man leicht erkennen kann, hätte der Suchprozeß zum global optimalen Punkt y^+ geführt, wenn er mit der Richtung $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder z.B. mit dem Anfangspunkt $z^1 = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \end{pmatrix}$ begonnen hätte.

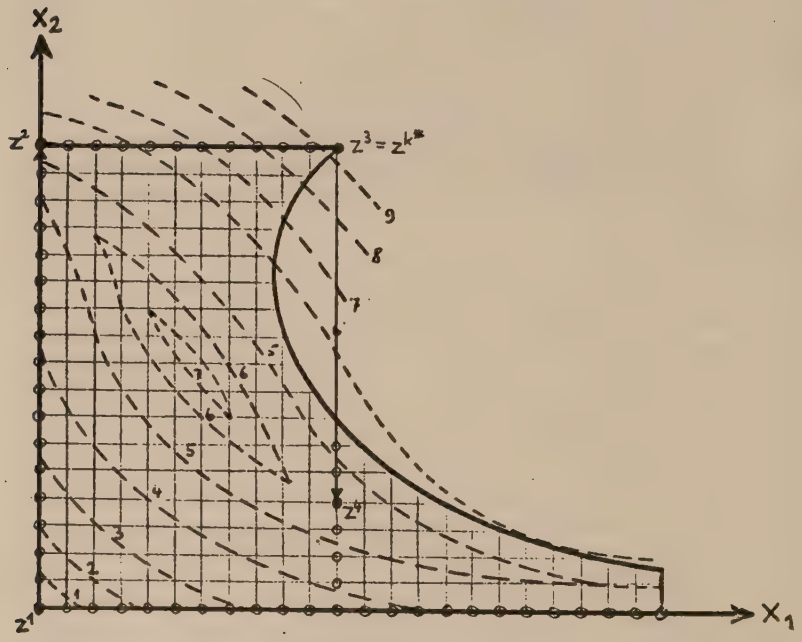


Abbildung 7

Bei der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs werden im ersten Schritt zur simultanen Bestimmung von optimaler Koordinatenrichtung und Schrittweite alle Punkte $z^1 + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\tau = 1 \ldots 23$ und

$z^1 + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\tau = 1 \ldots 17$ verglichen. Optimal ist $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\tau = 17$, so daß z^2 bei $x_1 = 0$, $x_2 = 17$ und $f(z^2) > 5$ liegt. Im zweiten Schritt sind nur die Schrittweiten für $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, nämlich $\tau = 1,2,\ldots,11$ zu prüfen. Es ergibt sich $z^3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}$ mit $f(z^3) > 9$. Im dritten Schritt mit der Richtung $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ führen nur die Schrittweiten $\tau = -11$, $\tau = -12, \ldots, \tau = -17$ zu zulässigen Punkten. Optimal ist $\tau = -13$. Da $f(z^4) < f(z^3)$ ist, endet der Suchprozeß; die Lösung lautet $x_1 = 11$, $x_2 = 17$, dabei ist $f(z^{k^+}) > 9$. Zur Bestimmung dieser Lösung waren nach der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs in 3 Schritten für 58 Punkte die Zielfunktionswerte abzulesen.

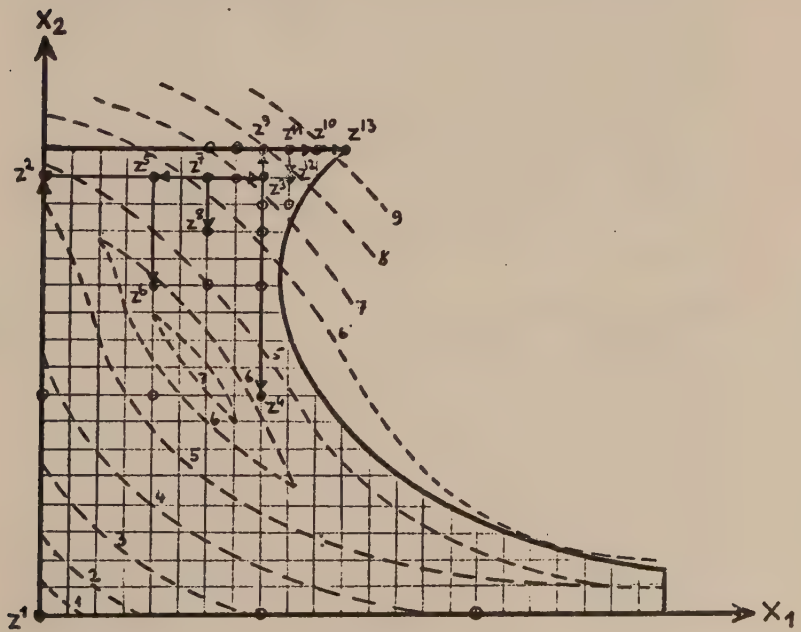


Abbildung 8

Bei der durch den Schrittweitenalgorithmus ergänzten Methode des steilsten Koordinatenanstiegs ist zunächst die Ziffer K bzw. die erste Basisschrittweite σ_1 zu bestimmen. Man stellt fest, daß $z^1 + 2^5 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $z^1 + 2^5 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ unzulässige, $z^1 + 2^4 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $z^1 + 2^4 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ zulässige Punkte sind. Also ist $K = 5$ und $\sigma_1 = 2^{5-1} = 16$ zu setzen. Im ersten Schritt sind demnach die Punkte $z^1 + 16 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $z^1 + 16 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ miteinander zu vergleichen. Es ist abzulesen $f\begin{pmatrix}16\\0\end{pmatrix} < 5$ und $f\begin{pmatrix}0\\16\end{pmatrix} > 5$, demnach ist $z^2 = \begin{pmatrix}0\\16\end{pmatrix}$. Da von z^2 ausgehend in der Richtung $d_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ mit der Schrittweite $\tau = 1 \cdot \sigma_1 = 16$ kein zulässiger Punkt zu erreichen ist und auch kein noch nicht in Betracht gezogener Punkt zu finden ist, wenn man in der Richtung $d^{k-1} = d_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ zurückgeht, ist für den nächsten Schritt die Basisschrittweite auf $\sigma_2 = 2^{K-2} = 8$ zu reduzieren. Als Alternativen für den neuen Punkt kommen $z^2 + 8 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $z^2 - 8 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ in Betracht. Das Optimum liegt bei $z^3 = \begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix}$ mit $f(z^3) > 7$. Im dritten Schritt ergibt der Vergleich von $z^3 - 1 \cdot \sigma_2 \cdot d_2 = z^3 - \begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$ und $z^3 - 2 \cdot \sigma_2 \cdot d_2 = z^3 - \begin{pmatrix}0\\16\end{pmatrix}$, daß z^4 bei $x_1 = 8$ und $x_2 = 8$ mit $f(z^4) < 6$ liegt. Wegen $f(z^4) < f(z^3)$ ist der Suchprozeß nunmehr mit reduzierter Schrittweite $\sigma_3 = 4$ von z^3 ausgehend fortzusetzen. Die weiteren Schritte bedürfen keiner besonderen Erläuterung, es sei lediglich noch auf den Schluß des Suchprozesses eingegangen, da sich hier Besonderheiten zeigen: Von z^{10} ausgehend wäre eigentlich in der Richtung $d_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ weiter zu suchen. Da aber

$z^{10} - 1 \cdot \sigma_K \cdot d_2$ und $z^{10} - 2 \cdot \sigma_K \cdot d_2$ unzulässig sind, ist zunächst in der Richtung $d^9 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bis auf z^{11} zurückzugehen. Da der Zielfunktionswert des besten der beiden Punkte $z^{11} - 1 \cdot d_2$ und $z^{11} - 2 \cdot d_2$ mit $f(z^{12}) < 8$ kleiner ist als $f(z^{10}) > 8$, endet hier der koordinatenparallele Suchprozeß. Abschließend ist noch der Optimalitätstest für z^{10} durchzuführen. Da von den z^{10} unmittelbar benachbarten Punkten lediglich $z^{10} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ noch nicht geprüft ist, ist nur noch für diesen Punkt der Zielfunktionswert abzulesen. Es zeigt sich, daß $f(z^{10}+1 \cdot d_1) > f(z^{10})$, so daß $z^{13} = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}$ festzuhalten ist. z^{13} weist keine unmittelbar benachbarten Punkte mehr auf, dieser Punkt gilt also als Lösung des Problems für $f(z^{13}) > 9$. Insgesamt waren zu der Bestimmung dieser Lösung in 12 Schritten für 25 Punkte die Zielfunktionswerte abzulesen.

Vergleicht man nun die Methoden des steilsten Anstiegs, des zyklischen Koordinatenanstiegs und des steilsten Koordinatenanstiegs mit und ohne Schrittweitenalgorithmus hinsichtlich Ergebnis und Rechenaufwand anhand dieses Beispiels, so ergibt sich folgende Übersicht:

Methode	Lösung		$f(z^{k+})$	Anzahl berechneter Punkte
	x_1	x_2		
Steilster Anstieg	6	9	$7 < f < 8$	39
Zyklischer Koordinatenanstieg	22	1	$5 < f < 6$	48
Steilster Koordinatenanstieg ohne Schrittweitenalgorithmus	11	17	$f > 9$	58
Steilster Koordinatenanstieg mit Schrittweitenalgorithmus	11	17	$f > 9$	25

In diesem Beispiel war also nur die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs geeignet, das globale Maximum aufzuspüren; dabei hat sich der Schrittweitenalgorithmus zur Reduzierung des Rechenaufwandes bewährt. Die oben aufgestellte Behauptung, daß es Fälle gibt, in denen die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs der Methode des steilsten Anstiegs und der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs überlegen ist, findet sich also bestätigt.

Indessen ist es selbstverständlich, daß der Vergleich dieser Methoden bei anderen Beispielen andere Ergebnisse zeitigt und daß die Leistungsfähigkeit der Verfahren entscheidend durch die Wahl des Anfangspunktes z^1 bestimmt wird. Generell kann man wohl sagen, daß die Methode des steilsten Anstiegs umso eher zu empfehlen sein wird, je besser es gelingt, eine Schätzung der Lage des globalen Maximums für die Wahl des Anfangspunktes heranzuziehen. Ist dagegen eine solche Schätzung nicht möglich und ist die Anzahl der Variablen und damit die Anzahl der zulässigen Richtungen, unter denen die Richtung des steilsten Anstiegs auszuwählen ist, sehr groß, so kann man eher damit rechnen, daß die Anwendung der mit dem globalen Schrittweitenalgorithmus ergänzten Methode des steilsten Koordinatenanstiegs das globale Maximum mit weniger Rechenaufwand bzw. mit gegebenem Rechenaufwand eine bessere Lösung zu bestimmen ermöglicht.

3 Ein numerisches Beispiel

Das folgende numerische Beispiel entspricht in seiner Struktur einem Problem der Produktions- und Absatzplanung bei vier Produktarten für eine Periode. Für jede Produktart existiere eine fallende Preis-Absatz-Funktion, wobei zwischen den einzelnen Produktarten teilweise absatzmäßige Verbundenheit (Substitutionsbeziehungen zwischen den Produktarten 1 und 2 und zwischen den Produktarten 3 und 4) bestehe. Die Kostenfunktionen seien überproportional steigende Funktionen der Ausbringungsmengen. Bei der Beschaffung von Rohstoffen, die für alle vier Produktarten erforderlich seien, existiere eine Rabattstaffel. Übersteigt die Ausbringungsmenge die vorhandene Kapazität, so sei eine mit einem Fixkostensprung verbundene Kapazitätserweiterung vorgesehen. Die Zielfunktion möge dementsprechend lauten:

$$
\begin{aligned}
(102)\quad g = {} & 200x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 100x_4 - 7x_1x_2 - 4x_3x_4 \\
& - 10x_1^2 - 20x_2^2 - 5x_3^2 - 10x_4^2 \\
& - \begin{cases} 2.(x_1+x_2+x_3+x_4) & \text{wenn } 0 \leq (x_1+x_2+x_3+x_4) < 10 \\ 4.(x_1+x_2+x_3+x_4) & \text{wenn } 10 \leq (x_1+x_2+x_3+x_4) < 15 \\ 6.(x_1+x_2+x_3+x_4) & 23\text{nn } 15 \leq (x_1+x_2+x_3+x_4) < 25 \end{cases} \\
& - \left[100 \text{ wenn } (x_1+x_2+x_3+x_4) > 10\right].
\end{aligned}
$$

Von den für die einzelnen Produktarten einzusetzenden Materialien seien einige knapp. Für die Erstellung der Produktart 2 sei ein bei der Erstellung der Produktart 4 anfallendes und anderweitig nicht zu beschaffendes Abfallprodukt erforderlich. Es kommen nur ganzzahlige Produktionsmengen (≡ Absatzmengen) in Betracht. Es seien dementsprechend folgende Nebenbedingungen einzuhalten:

(103) $x_1 + x_3 \leq 10$

(104) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$

(105) $x_2 = x_4$

(106) $x_3 = 5$

(107) $x_4 = 8$

(108) $0 = x_i$ ganzzahlig für i=1,...,4 .

Der Suchprozeß nach der Methode des steilsten Anstiegs sei in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

k	z^k				$f(z^k)$	d^k	τ^k	z^{k+1}				$f(z^{k+1})$
	x_1	x_2	x_3	x_4				x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	0	0	0	0	1111	4	4	4	4	4	870
2	4	4	4	4	870	1-101	2	6	2	4	6	1148
3	6	2	4	6	1148	1-1-1-1	1	7	1	3	5	1232
4	7	1	3	5	1232	10-10	2	9	1	1	5	1278
5	9	1	1	5	1278	(0001)	(1)	(9)	(1)	(1)	(6)	(1270)

Der Suchprozeß endet bei z^5 mit $x_1 = 9$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ und $f(z^5) = 1278$, da der unmittelbar benachbarte Punkt in der optimalen Richtung einen geringeren Zielfunktionswert aufweist. Bei maximal $3^4-1 = 80$ in jedem Schritt zu prüfender zulässiger Richtungen war für insgesamt 225 Punkte der Wert der Zielfunktion zu berechnen.

Die nächste Tabelle faßt den Suchprozeß nach der Methode des zyklischen Koordinatenanstiegs zusammen:

k	z^k				$f(z^k)$	d^k	τ^k	z^{k+1}				$f(z^{k+1})$
	x_1	x_2	x_3	x_4				x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	0	0	0	0	1000	10	10	0	0	0	1040
2	10	0	0	0	1040	0100	0	10	0	0	0	1040
3	10	0	0	0	1040	0010	0	10	0	0	0	1040
4	10	0	0	0	1040	0001	5	10	0	0	5	1240
5	10	0	0	5	1240	1000	0	10	0	0	5	1240
6	10	0	0	5	1240	0100	1	10	1	0	5	1256
7	10	1	0	5	1256	0010	0	10	1	0	5	1256
8	10	1	0	5	1256	0001	0	10	1	0	5	1256
9	10	1	0	5	1256	1000	0	10	1	0	5	1256
10	10	1	0	5	1256	-	-	-	-	-	-	-

Der Suchprozeß endet nach dem Kriterium (85) bei $z^{10} = z^{10-4+1} = z^7$ mit $x_1 = 10$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$ und $f(z^{10}) = 1256$. Bis dahin war der Wert der Zielfunktion für 51 Punkte zu berechnen[1].

In der dritten Tabelle sei der Suchprozeß nach der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs ohne Schrittweitenalgorithmus zusammengefaßt:

1 Der Umstand, daß der Suchprozeß bei einer suboptimalen Lösung endet, ist in erster Linie der Ganzzahligkeitsbedingung zuzuschreiben.

k	z^k				$f(z^k)$	$Z(z^k)$	d^k	τ^k	z^{k+1}				$f(z^{k+1})$
	x_1	x_2	x_3	x_4					x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	0	0	0	0	0	1000	10	10	0	0	0	1040
2	10	0	0	0	1040	1040	0001	5	10	0	0	5	1240
3	10	0	0	5	1240	1240	0100	1	10	1	0	5	1256
4	10	1	0	5	1256	1256	0001	1	10	1	0	6	1252
5	10	1	0	6	1252	1256	1000	-1	9	1	0	6	1243
6	9	1	0	6	1243	1256	0010	1	9	1	1	6	1270
7	9	1	1	6	1270	1270	0001	-1	9	1	1	5	1278
8	9	1	1	5	1278	1278	0100	1	9	2	1	5	1261
9	9	2	1	5	1261	1278	1000	-1	8	2	1	5	1239
10	8	2	1	5	1239	1278	0010	1	8	2	2	5	1260
11	8	2	2	5	1260	1278	(-1010)	(1)	(8)	(1)	(2)	(5)	(1270)

Nach dem Kriterium (92) endet der Suchprozeß mit dem Schritt $z^{10} \rightarrow z^{11}$, da $k^+ = 8$ und $8+4-1 = 11$ gilt.

Als Lösung erscheint also z^8 mit $x_1 = 9$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ und $f(z^8) = 1278$. Unter Berücksichtigung des Optimalitätstests für z^8 gemäß Kriterium (96) war der Wert der Zielfunktion für 164 Punkte zu berechnen.

Schließlich sei der Suchprozeß nach der Methode des steilsten Koordinatenanstiegs zusammengefaßt und kurz erläutert:

k	z^k				$f(z^k)$	$Z(z^k)$	σ	d^k	τ^k	z^{k+1}				$f(z^{k+1})$
	x_1	x_2	x_3	x_4						x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	0	0	0	0	0	8	1000	8	8	0	0	0	976
2	8	0	0	0	976	976	8	0001	8	8	0	0	8	1116
3	8	0	0	8	1116	1116	8	-	-	-	-	-	-	-
4	8	0	0	8	1116	1116	4	0001	-4	8	0	0	4	1148
5	8	0	0	4	1148	1148	4	0100	4	8	4	0	4	1052
6	8	4	0	4	1052	1148	4	1000	-4	4	4	0	4	796
7	4	4	0	4	796	1148	4	0010	4	4	4	4	4	900
8	4	4	4	4	900	1148	4	-	-	-	-	-	-	-
9	8	0	0	4	1148	1148	2	0010	2	8	0	2	4	1204
10	8	0	2	4	1204	1204	2	0100	2	8	2	2	4	1252
11	8	2	2	4	1252	1252	2	0001	2	8	2	2	6	1248
12	8	2	2	6	1248	1252	2	0010	-2	8	2	0	6	1204
13	8	2	0	6	1204	1252	2	1000	2	10	2	0	6	1228
14	10	2	0	6	1228	1252	2	-	-	-	-	-	-	-
15	8	2	2	4	1252	1252	1	0100	-1	8	1	2	4	1262
16	8	1	2	4	1262	1262	1	0001	1	8	1	2	5	1270
17	8	1	2	5	1270	1270	1	0100	1	8	2	2	5	1260
18	8	2	2	5	1260	1270	1	0010	-1	8	2	1	5	1239
19	8	2	1	5	1239	1270	1	1000	1	9	2	1	5	1261
20	9	2	1	5	1261	1270	1	-	-	-	-	-	-	-
21	8	1	2	5	1270	1270	-	10-10	1	9	1	1	5	1278
22	9	1	1	5	1278	1278	-	(-1011)	(1)	(8)	(1)	(2)	(6)	(1258)

Von $z^1 = (0,0,0,0)$ ausgehend ist in der Richtung $d_1 = (1,0,0,0)$ die Schrittweite $\tau = 16$ unzulässig, die Schrittweite $\tau = 8$ aber zulässig. In keiner anderen koordinatenparallelen Richtung ist eine größere Schrittweite zulässig. Der Suchprozeß beginnt also mit der Basisschrittweite $\sigma_1 = 8$. Von $z^3 = (8,0,0,8)$ ausgehend ist mit $\tau = 1 \cdot \sigma_1$ kein zulässiger Punkt zu erreichen. Der Suchprozeß ist also von dem besten der Punkte aus der Folge z^1, z^2, z^3, hier also $z^4 \equiv z^3$, ausgehend mit halbierter Basisschrittweite $\sigma_2 = 4$ fortzusetzen. Im Schritt $z^7 \rightarrow z^8$ wird das Kriterium (92) erfüllt; es ist also mit erneut halbierter Schrittweite $\sigma_3 = 2$ von $z^9 \equiv z^5$ ausgehend weiter zu suchen. Als Beispiele seien die Schritte $z^9 \rightarrow z^{10}$ und $z^{10} \rightarrow z^{11}$ eingehender beschrieben:

k	z^k				d	τ'	$\tau = \tau' \cdot \sigma_3$	y				f(y)
	x_1	x_2	x_3	x_4				x_1	x_2	x_3	x_4	
9	8	0	0	4	1000	-2	-4	4	0	0	4	896
					1000	-1	-2	6	0	0	4	1120
					1000	1	2	10	0	0	4	1196
					1000	2	4	12	0	0	4	-
					0100	-2	-4	8	-4	0	4	-
					0100	-1	-2	8	-2	0	4	-
					0100	1	2	8	2	0	4	1164
					0100	2	4	8	4	0	4	-
					0010	-2	-4	8	0	-4	4	-
					0010	-1	-2	8	0	-2	4	-
					0010	1	2	8	0	2	4	1204 *
					0010	2	4	8	0	4	4	-
					0001	-2	-4	8	0	0	0	-
					0001	-1	-2	8	0	0	2	1160
					0001	1	2	8	0	0	6	1156
					0001	2	4	8	0	0	8	-
10	8	0	2	4	1000	-2	-4	4	0	2	4	968
					1000	-1	-2	6	0	2	4	1076
					1000	1	2	10	0	2	4	
					1000	2	4	12	0	2	4	
					0100	-2	-4	8	-4	2	4	
					0100	-1	-2	8	-2	2	4	
					0100	1	2	8	2	2	4	1252 *
					0100	2	4	8	4	2	4	1112
					0001	-2	-4	8	0	2	0	1080
					0001	-1	-2	8	0	2	2	1132
					0001	1	2	8	0	2	6	1228
					0001	2	4	8	0	2	8	1144

Nicht für alle schematisch auftauchenden Richtungs-Schrittweiten-Kombinationen ist die Berechnung des Zielfunktionswertes erforderlich; in der 4., 5., 6., 9., 10., 12. und 19. bis 22. Zeile deshalb nicht, weil sich unzulässige Punkte ergeben, in der 8., 12., 13. und 16. Zeile deshalb nicht, weil sich Punkte ergeben, die bereits in der Folge $z^1 \ldots z^8$ enthalten sind. Die Sterne (*) in der 11. und 23. Zeile markieren den in dem jeweiligen Schritt höchsten erreichbaren Zielfunktionswert und damit den jeweils nächsten Punkt z^{10} bzw. z^{11} ... Gemäß dem Kriterium (92) endet der Suchprozeß bei z^{20} mit $x_1 = 9$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ und $f(z^{20})=1261$. Der Optimalitätstest für $z^{k+} = z^{17}$ mit $x_1 = 8$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 5$ und $f(z^{17}) = 1270$ nach Maßgabe der Regel (96) führt alsdann zu dem Punkt z^{22} mit $x_1 = 9$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ und $f(z^{22}) = 1278$, der durch erneuten Optimalitätstest als lokales Maximum bestätigt wird. Einschließlich der Optimalitätstests waren 141 Zielfunktionsberechnungen erforderlich.

Wie die folgende vergleichende Aufstellung zeigt, ist mit dem vorstehenden Beispiel erneut der Nachweis gelungen, daß die Methode des steilsten Koordinatenanstiegs mit Schrittweitenalgorithmus eine empfehlenswerte Methode der Wirtschaftlichkeitsrechnung sein kann:

Methode	Ergebnis				$f(z^{k^+})$	Anzahl Zielfunktionsberechnungen
	x_1	x_2	x_3	x_4		
Steilster Anstieg	9	1	1	5	1278	225
Zyklischer Koordinatenanstieg	10	1	0	5	1256	51
Steilster Koordinatenanstieg ohne Schrittweitenalgorithmus	9	1	1	5	1278	164
Steilster Koordinatenanstieg mit Schrittweitenalgorithmus	9	1	1	5	1278	141
Vollenumeration	9	1	1	5	1278	2234

Erneut ist allerdings darauf hinzuweisen, daß der Vergleich bei anderen Beispielen und bei anderer Wahl des Ausgangspunktes zu einem anderen Ergebnis führen kann.

E Zusammenfassung: Die Bedeutung der iterativen Suchverfahren

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war die Konfrontation der geläufigen Methoden der Unternehmensforschung mit der Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre. Letztere wurde darin gesehen, daß es darum geht, Methoden der Entscheidungsfindung für betriebswirtschaftliche Probleme und - im Zusammenhang damit - Methoden der Wirtschaftlichkeitsrechnung zu entwickeln und der Unternehmungspraxis zu empfehlen.

Ein Abriß der mathematischen Optimierungsverfahren der Unternehmensforschung zeigte, daß diese nur in begrenztem Maße geeignet sind, zur Lösung betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme beizutragen. Ihre Anwendung ist an oft beträchtlich einschränkende Voraussetzungen bezüglich der Struktur der Modelle gebunden, in denen die Entscheidungssituation abgebildet werden soll. Dieser Umstand verleitet dazu, gegebene Struktur-Informationen über die Entscheidungssituation zu vernachlässigen, um ein zu konstruierendes Modell auf bestimmte Optimierungsverfahren zuzuschneiden. Die Folge ist, daß die Lösung des Modells nicht die Lösung für die gegebene empirische Entscheidungssituation sein kann, da diese in dem Modell nicht adäquat abgebildet ist.

Der Verfasser legte daher seine Auffassung dar, daß bei der Formulierung eines mathematisch-formalen Modells gegebene Strukturinformationen nicht vernachlässigt werden dürfen, wenn die Modellösung die in der Vorstellung des Entscheidungsträgers optimale Lösung des gegebenen Problems sein soll. Unvermeidliche Informationslücken oder auch gewollte Ungenauigkeiten stehen indessen der subjek-

tiven Optimierung, d.h. der Ermittlung der nach den Vorstellungen des Entscheidungsträgers optimalen Lösung, nicht entgegen. Denn die totale Optimierung der Unternehmungsweise im Ganzen umfaßt neben der Festlegung der in ein Modell der Wirtschaftlichkeitsrechnung eingehenden (primären) Unternehmungsvariablen auch die nur intuitiv mögliche Entscheidung über den Genauigkeitsgrad der Beschaffung von numerischen Informationen und der Durchführung der Wirtschaftlichkeitsrechnung. So kann selbst eine numerisch-approximative oder, wie man auch sagen kann, "befriedigende" Lösung eines die Struktur der empirischen Entscheidungssituation exakt abbildenden Modells die richtige Grundlage für eine in der subjektiven Sicht des Entscheidungsträgers optimale Determinierung der Unternehmungsweise im Ganzen sein.

Die Lückenhaftigkeit von numerischen Informationen äußert sich häufig darin, daß die in dem Entscheidungsmodell zu erfassenden Funktionen nicht in vollständig geschlossener analytischer Form vorliegen. Vielmehr ist es in der Praxis meist nur möglich, einzelne Elemente der Zielfunktion und des Systems der Nebenbedingungen anzugeben, so daß nur diskrete alternative Variablenkonstellationen im ganzen bewertet werden können. Das hat zur Folge, daß die Anwendungsvoraussetzungen herkömmlicher Optimierungsverfahren entweder nicht erfüllt sind, oder, daß ihr Vorliegen nicht geprüft werden kann. Wenn man dann nicht sofort auf rein intuitive Entscheidungen ausweichen will, ist ein Verfahren der Wirtschaftlichkeitsrechnung erforderlich, das geeignet ist, möglichst gute Lösungen aufzuspüren, wobei lediglich vorauszusetzen ist, daß jede aufgefundene Variablenkonstellation als unzulässig oder zulässig identifiziert werden und in letzterem Falle bewertet werden kann.

Diese Anforderungen, so meint der Verfasser, werden von den beschriebenen iterativen Suchverfahren erfüllt. Insbesondere die "Methode des steilsten Koordinatenanstiegs" in Verbindung mit dem oben beschriebenen "globalen Algorithmus" scheint als heuristisches Verfahren zur globalen Optimierung beliebig nicht-linearer ganzzahliger Programmierungsprobleme zur Vorbereitung unternehmerischer Entscheidungen geeignet zu sein.

VERZEICHNIS DER SYMBOLE

A,B,C,...	alle großen lateinischen Buchstaben, sofern nichts anderes angegeben - je nach Zusammenhang Konstante (einschließlich Laufgrenzen für Indizes) oder Mengen
A	spezielle Bedeutung: konstante Anzahl von Arbeitskräften
A_{km}	Mengen-Umrechnungskoeffizienten
a,b,c,...	alle kleinen lateinischen Buchstaben - Variable (einschließlich Laufindizes)
a	spezielle Bedeutung: variable Anzahl von Arbeitskräften
α	je nach Zusammenhang: Funktionszeichen für Absatz-Funktionen oder obere Schrittweitengrenze
B	obere Schranke, upper bound
B_{km}	Stufenprodukt-Einsatzkoeffizient
b	untere Schranke, lower bound
β	untere Schrittweitengrenze
D	n-dimensionaler Variationsraum aller Variablen
D_i	(eindimensionaler) Variationsraum der i-ten Variablen
d	Richtungsvektor
d_i	Koordinatenrichtung, Einheitsvektor mit der Komponente 1 an der i-ten Stelle
∂	Differentiationszeichen
E^n	n-dimensionaler Euklidischer Raum
e	Erlös
$\exists$	"es existiert"
$\in$	"Element von"
$\notin$	"nicht Element von"
f	allgemeines Funktionszeichen, meist Zielfunktion

$\mathscr{C}$	Funktionszeichen für Verbrauchsfunktionen
G	konstante Gehaltsziffer
g	je nach Zusammenhang Gewinn oder allgemeines Funktionszeichen
∇	"Gradient"
I,J,K,...	Laufgrenzen für die Indizes i,j,k,...
i,j,k,...	Laufindizes mit aus dem Zusammenhang hervorgehender Bedeutung
i	allgemeiner Variablenindex; in besonderer Bedeutung: Periodenindex (i=1...I)
j	Arbeitsschichtenindex (j=1...J)
K	je nach Zusammenhang konstante Kostenziffer oder höchstzulässiger Exponent zur Basis 2, so daß 2^K eine zulässige Schrittweite ist
K'	Hilfsgröße zur Bestimmung von K als Exponent zur Basis 2
$\mathfrak{K}$	Hilfsgröße zur Berechnung von k'
k	je nach Zusammenhang variable Kostenziffer oder Laufindex zur Numerierung der Iterationspunkte z und der Iterationsschritte; in besonderer Bedeutung auch Fertigungsstufenindex (k=1...K)
k'	Laufindex zur Numerierung der Basis-Schrittweiten σ
L	konstanter Lohnsatz
L_0	Lager-Anfangsbestand
l	je nach Zusammenhang variable Lohnsumme oder Unterindex zu k; in besonderer Bedeutung auch Aggregatindex (l=1...L)
l_k	als Index laufende Nummer für Aggregate der k-ten Fertigungsstufe (l_k=1...L_k)
λ	Lagrange-Multiplikator
log	"Logarithmus"
$\mathscr{M}$	Strafkosten-Koeffizient

m	Laufindex, in spezieller Bedeutung: Anzahl der Nebenbedingungen, auch Produktartenindex (m=1...M)
max	"Maximum"
min	"Minimum"
n	Laufindex, in spezieller Bedeutung: Anzahl der Variablen; auch Faktorartenindex (n=1...N)
ν	Variantenindex, laufende Nummer eines Variablen-Niveaus
P	konstanter Absatzpreis
p	variabler Absatzpreis; als Indes laufende Nummer einer technischen Eigenschaft
$\vec{p}$	Preis-Vektor
$\prod$	Produkt-Zeichen
ϕ	Operator-Zeichen
Q	konstanter Beschaffungspreis
q	variabler Beschaffungspreis; als Indes laufende Nummer für eine Qualifikationsart von Arbeitskräften
R	konstante Menge eines Produktionsfaktors
r	variable Produktionsfaktormenge
s	Rabattklassenindex (s=1...S)
$\sum$	Summenzeichen
σ	Basis-Schrittweite
T	an einem Vektor: Transpositionszeichen sonst: konstantes Zeit-Niveau
t	Einsatzzeit eines Aggregates
$\vec{t}$	Einsatzzeit-Vektor
τ	Schrittweite
τ'	Schrittweiten-Multiplikator

U	"Umgebung"
$\ddot{U}$	Überstundenzuschlagssatz als Dezimalbruch
V	Lösungsraum, Menge der zulässigen Lösungen
X	konstante Erzeugnismenge
$\bar{X}$	konstantes Intensitätsniveau
x	allgemein Niveau einer Variablen, in spezieller Bedeutung Erzeugnismenge
$\bar{x}$	Einsatzintensität eines Aggregates
$\bar{\vec{x}}$	Einsatzintensitäten-Vektor
y	beliebiger Punkt E^n-Vektor von n Variablen-Niveaus
Z	Maximumfunktion
z	je nach Zusammenhang Iterationspunkt im Suchalgorithmus oder "technische Eigenschaft"
ζ	Funktionszeichen für Abhängigkeiten technischer Eigenschaften
$+$	bei Verwendung wie Index: Optimalitätszeichen
$>$	"größer als"
$=$	"gleich"
$\equiv$	"identisch"
$<$	"kleiner als"
∞	"unendlich"
$\subset$	"Teilmenge von"
$\mid$	"unter der Bedingung"
$\|\ldots\|$	Absolut-Zeichen

LITERATURVERZEICHNIS

Ackoff, Russell L., Towards a Behavioral Theory of Communication, Management Science, Band 4, 1958, S. 218 - 234.

Derselbe, Vorwort zu Ackoff, Russell L. (Hrsg.) Progress in Operations Research, Band 1, New York - London 1961.

Adam, Dietrich, Das Interdependenzproblem in der Investitionsrechnung und die Möglichkeiten einer Zurechnung von Erträgen auf einzelne Investitionsobjekte, Der Betrieb, 19. Jg., 1966, S. 989 - 993.

Derselbe, Produktionsplanung bei Sortenfertigung. Ein Beitrag zur Theorie der Mehrproduktunternehmung, Dissertation Hamburg 1965; (überarbeitete Fassung) Wiesbaden 1969.

Derselbe, Koordinationsprobleme bei dezentralen Entscheidungen, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 39. Jg., 1969, S. 615 - 632.

Derselbe, Entscheidungsorientierte Kostenbewertung, Wiesbaden 1970.

Agin, Norman, Optimum Seeking with Branch and Bound, Management Science, Serie B, Band 13, 1966, S. 176 - 185.

Albach, Horst, Entscheidungsprozeß und Informationsfluß in der Unternehmensorganisation, in: Schnaufer, Erich-Agthe, Klaus (Hrsg.), Organisation, TFB - Handbuchreihe, Erster Band, Baden-Baden 1961.

Derselbe, Zur Verbindung von Produktionstheorie und Investitionstheorie, in: Koch, Helmut (Hrsg.), Zur Theorie der Unternehmung, Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg, Wiesbaden 1962, S. 137 - 203.

Derselbe, Produktionsplanung auf der Grundlage technischer Verbrauchsfunktionen, in: Heft 105 der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Köln - Opladen 1962, S. 45 - 94.

Allen, R.G.D., Mathematik für Volks- und Betriebswirte. Eine Einführung in die mathematische Behandlung der Wirtschaftstheorie, aus dem Englischen übersetzt von Erich Kosiol, Berlin 1956.

Balinski, M.L., Integer Programming: Methods, Uses, Computation, Management Science, Serie A, Band 12, 1966, S. 253-313.

Baumol, W.J. - Bushnell, R.C., Error produced by Linearization in Mathematical Programming, Econometrica, Band 35, 1967, S. 447-471.

Beckmann, Martin J., Flow Model of Communication, Towards an Economic Theory of Information, Cowles Commission Discussion Paper, No. 20, New Haven (Conn.) 1956.

Derselbe, Lineare Planungsrechnung, Linear Programming, Ludwigshafen am Rhein 1959.

Derselbe, Dynamic Programming of Economic Decisions, Band II von Krelle, W. - Künzi, H.P. et al. (Hrsg.), Ökonometrie und Unternehmensforschung (Econometrics and Operations Research), Berlin - Heidelberg - New York 1968.

Beckmann, M. - Künzi, H.P. (Hrsg.), Einführung in die Methode Branch and Bound, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Nr. 4, Berlin - Heidelberg - New York 1968.

Bellman, Richard, Dynamic Programming, Princeton (N.J.) 1957.

Bellman, Richard - Dreyfus, Stuart E., Applied Dynamic Programming, Princeton (N.J.) 1962.

Bellmore, M. - Greenberg, H.J. - Jarvis, J.J., Generalized Penalty-Function Concepts in Mathematical Optimization, Operations Research, Band 18, 1970, S. 229 -252.

Bierfelder, Wilhelm H., Optimales Informationsverhalten im Entscheidungsprozeß der Unternehmung, Berlin 1968.

Bishop, George T., On a Problem of Production Scheduling, Management Science Band 5, 1957, S. 97 - 103.

Bowman, Edward H., Production Scheduling by the Transportation Method of Linear Programming, Management Science Band 4, 1956, S. 100 - 103.

Brioschi, Francesco - Even, Shimon, Minimizing the Number of Operations in Certain Discrete-Variable Optimization Problems, Operations Research, Band 18, S. 66 - 81.

Brunner, Manfred, Planung in Saisonunternehmungen. Zeitliche Abstimmung zwischen Fertigungs- und Absatzvolumen bei saisonalen Absatzschwankungen, Band 16 von Gutenberg, E. - Hasenack, W. - Hax, K. - Schäfer, E. (Hrsg.), Beiträge zur betriebswirtschaftlichen Forschung, Köln - Opladen 1962.

Busse.von Colbe, Walther, Entwicklungstendenzen in der Theorie der Unternehmung, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 34. Jg., 1964, S. 615 - 627.

Churchman, C. West - Ackoff, Rusell L. - Arnoff, E. Leonard, Introduction to Operations Research, New York 1957.

Danø, Sven, Linear Programming in Industry, Theory and Applications. An Introduction, 3. Aufl., Wien - New York 1965.

Dantzig, George B., Maximization of a Linear Function of Variables subject to Linear Inequalities, in: Koopmans, Tjalling C. (Hrsg.), Activity Analysis of Production and Allocation, Proceedings of a Conference, New York - London 1951, S. 339 - 347.

Derselbe, A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem, in: Koopmans, Tjalling C. (Hrsg.), Activity Analysis of Production and Allocation, Proceedings of a Conference, New York - London (1. Aufl. 1957, S. 330 - 335.

Dantzig, George B., Linear Programming and Extensions, Princeton (N.J.) 1963. Deutsche Ausgabe von Jaeger, Arno, Lineare Programmierung und Erweiterung, Band II von Krelle, W. - Künzi, H.P. et al. (Hrsg.), Ökonometrie und Unternehmensforschung - Econometrics and Operations Research, Berlin - Heidelberg - New York 1966.

Dellman, Klaus - Nastansky, Ludwig, Kostenminimale Produktionsplanung bei rein-intensitätsmäßiger Anpassung mit differenzierten Intensitätsgraden, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 39. Jg., 1969, S. 239 - 268.

Dinkelbach, Werner, Zum Problem der Produktionsplanung im Ein- und Mehrproduktunternehmen, Einzelschrift Nr. 4 von Adam, Adolf (Hrsg.), Unternehmensforschung für die Wirtschaftspraxis, Würzburg - Wien 1964.

Dorfman, Robert, Application of Linear Programming to the Theory of the Firm, Berkeley - Los Angeles (Cal.) 1951.

Derselbe, Mathematical, or "Linear" Programming: A Nonmathematical Exposition, The American Economic Review, Band 43, 1953, S. 797 - 825.

Dorfman, Robert - Samuelson, Paul A. - Solow, Robert M., Linear Programming and Economic Analysis, New York - Toronto - London 1958.

Dorn, W.S., Non-Linear Programming - A Survey, Management Science Band 9, 1962/63, S. 171 - 208.

Dijkstra, E.W., A Note on two Problems in Connexion with Graphs, Numerische Mathematik, Band 1, 1959, S. 269 - 271.

Dreyfus, Stuart E., Dynamic Programming and the Calculus of Variations, New York (N.Y.) 1958.

Duckworth, W. Eric, A Guide to Operational Research, London 1962.

Eichenberger, Heinrich, Ökonomische Methoden in der linearen Planungsrechnung, Band 2 von Billeter, Ernst P. (Hrsg.), Schriftenreihe des Instituts für Automation und Unternehmensforschung der Universität Freiburg (Schweiz), Hamburg - Berlin 1963.

Elsner, Kurt, Mehrstufige Produktionstheorie und dynamisches Programmieren, Meisenheim am Glan 1964.

Fay, Franz-Josef, Lineare Algebra und Optimierung, Mathematische Grundlage und Beispiele zur linearen Programmierung, Wiesbaden 1968.

Ferner, Walter, Modelle zur Programmplanung im Absatzbereich industrieller Betriebe, Köln - Berlin - Bonn - München 1966.

Ferschl, E., Grundzüge des Synamic Programming, Unternehmensforschung Band 3, 1959, S. 70 - 80.

Fletcher, R., Function minimization without evaluating derivatives - a review, The Computer Journal Band 8, 1965/66, S. 33 - 41.

Fletcher, Allan - Clarke, Geoffrey, Mathematische Hilfsmittel der Unternehmensführung, ins Deutsche übertragen von Ludwig Pack, München 1966, S. 198 - 220.

Floyd, R.W., Algorithm 97, Shortest Path, in: Communications ACM, Band 5, 1967, S. 345.

Förstner, Karl - Henn, Rudolf, Dynamische Produktionstheorie und Lineare Programmierung, Meisenheim am Glan 1957.

Frank, W., Mathematische Grundlagen der Optimierung. Variationsrechnung - dynamische Programmierung - Maximumprinzip, München - Wien 1969.

Gäfgen, Gérard, Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung, Untersuchungen zur Logik und ökonomischen Bedeutung des rationalen Handelns, 2. Aufl., Tübingen 1968.

Gass, Saul I,, Linear Programming, Methods and Applications, New York - Toronto - London 1958

Gomory, Ralph E., An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, IBM Mathematics Research Project, Technical Report No. 1, Princeton (N.J.) 1958.

Greenwald, Dakota Ulrich, Linear Programming, An Explanation of the Simplex Algorithm, New York 1957.

Gutenberg, Erich, Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, 1. Lieferung, Reihe A, 1. Beitrag von Gutenberg, Erich (Hrsg.), Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1958.

Derselbe, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Erster Band: Die Produktion, 12. Aufl., Berlin - Heidelberg - New York 1966 - Zweiter Band: Der Absatz, 7. Aufl., Berlin - Göttingen - Heidelberg 1964.

Hadley, George, Linear Programming, Reading (Mass.) - Palo Alto (Cal.) - London 1962.

Derselbe, Nichtlineare und dynamische Programmierung, in deutscher Sprache herausgegeben von Künzi, H.P., Würzburg - Wien 1969.

Hammann, Peter, Gewinnmaximierung - Dominantes Ziel oder Zieldominante, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 38. Jg., 1968, S. 257 - 268.

Hanssmann, Fred, Operations Research in Production and Inventory Control, New York - London 1962.

Hax, Karl, Der Gewinnbegriff in der Betriebswirtschaftslehre, Band 10 von Schmalenbach, Eugen (Hrsg.), Ergänzungsbände zur Zeitschrift für Handelswissenschaftliche Forschung, Leipzig 1926.

Heinen, Edmund, Anpassungsprozesse und ihre kostenmäßigen Konsequenzen, dargestellt am Beispiel des Kokereibetriebes, Köln - Opladen 1957.

Derselbe, Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, Band I, Begriff und Theorie der Kosten, 2. Aufl., Wiesbaden 1965.

Heinen, Edmund, Einführung des Herausgebers zu Vischer, Peter, Simultane Produktions- und Absatzplanung, Rechnungstechnische und organisatorische Probleme mathematischer Programmierungsmodelle, Band 3 der Schriftenreihe "Die Betriebswirtschaft in Forschung und Praxis", Wiesbaden 1967.

Henn, Rudolf, Über die Struktur mikroökonomischer Entscheidungssituationen, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 34. Jg., 1964, S. 508 - 515.

Henn, R. - Künzi, H.P., Einführung in die Unternehmensforschung II, Berlin - Heidelberg - New York 1968.

Hesselbach, J. - Eisgruber, L.M., Betriebliche Entscheidungen mittels Simulation, Berlin 1967.

Holt, Charles C. - Modigliani, Franco - Muth, John F. - Simon, Herbert A., Planning Production, Inventories, and Work Force, Englewood Cliffs (N.J.) 1960.

Howard, Ronald A., Dynamic Programming and Markov Processes, Cambridge (Mass.) - New York (N.Y.) - London 1960.

Derselbe, Dynamic Programming, Management Science, Serie A, Band 12, 1966, S. 317 - 348.

Jacob, Herbert, Produktionsplanung und Kostentheorie, in: Koch, Helmut (Hrsg.), Zur Theorie der Unternehmung, Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg, Wiesbaden 1962, S. 205 - 268.

Derselbe, Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 34. Jg., 1964, Teil I, S. 487 - 507, Teil II, S. 551 - 594.

Joksch, H.C. Lineares Programmieren, Nr. 4 von Hoffmann, Walther G. (Hrsg.), Schriftenreihe zur angewandten Wirtschaftsforschung, Tübingen 1962.

Kantorowitsch, C.W., Die Weiterentwicklung der mathematischen Methoden und die Perspektiven ihrer Anwendung in der Planung und Ökonomik, Nemtschinow, W.S. (Hrsg.), Die Anwendung mathematischer Methoden in der Ökonomie, Leipzig 1963, S. 306 - 348.

Kelley, J.E., The Cutting-Plane Method for Solving Convex Programs, SIAM Journal on Applied Mathematics, Band 8, 1960, S. 703 ff.

Kern, Werner, Optimierungsverfahren in der Ablauforganisation, Gestaltungsmöglichkeiten mit Operations Research, Essen 1967.

Kienle, Richard von (Hrsg.), Keysers Fremdwörterlexikon, Heidelberg 1955.

Kilger, Wolfgang, Produktions- und Kostentheorie, 4. Lieferung, Reihe A, Beitrag Nr. 13 von Gutenberg, Erich (Hrsg.), Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1958.

Derselbe, Planungsrechnung und Entscheidungsmodelle des Operations Research, Unternehmensplanung als Instrument der Unternehmensführung, Bd. 9 der Schriftenreihe der Arbeitsgemeinschaft Planungsrechnung e.V. (AGPLAN), Wiesbaden 1965, S. 55 - 75.

Kleibohm, K., Ein Verfahren zur approsimativen Lösung von konvexen Programmen, Dissertation Zürich 1966.

Koch, Helmut, Betriebliche Planung, Grundlagen und Grundfragen der Unternehmungspolitik, Reihe A, Beitrag Nr. 4 von Gutenberg, Erich (Hrsg.), Die Wirtschaftswissenschaften, Wiesbaden 1961.

Derselbe, Über eine allgemeine Theorie des Handelns, in: Helmut Koch (Hrsg.), Zur Theorie der Unternehmung, Festschrift zum 65. Geburtstag von E. Gutenberg, Wiesbaden 1962, S. 367 - 423.

Koch, Helmut, Die Theorie der Unternehmung als Globalanalyse, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, Band 120, Tübingen 1964, S. 385 - 434.

Derselbe, Zur Diskussion über den Kostenbegriff, in: Koch, Helmut, Grundprobleme der Kostenrechnung, Köln - Opladen 1966, S. 9 - 47.

Derselbe, Zur Kontroverse: "wertmäßiger" - "pagatorischer" Kostenbegriff, in: Koch, Helmut, Grundprobleme der Kostenrechnung, Köln - Opladen 1966, S. 48 - 62.

Derselbe, Das Gesetz vom abnehmenden Kapazitätszuwachs und seine unternehmungstheoretische Bedeutung, Einzelveröffentlichung aus "Produktionstheorie und Produktionsplanung", Festschrift für Karl Hax zum 65. Geburtstag, Köln - Opladen 1966.

Derselbe, Der Begriff des ökonomischen Gewinns - Zur Frage des Optimalitätskriteriums in der Wirtschaftlichkeitsrechnung, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 20. Jg. (NF), 1968, S. 389 - 441.

Derselbe, Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, Probleme der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre, Wiesbaden 1970.

Korn, Granino A., Hybrid computer Monte Carlo techniques, in: John McLeod (Hrsg.), Simulation. The Dynamic Modeling of Ideas and Systems with Computers, New York - San Francisco - Toronto - London - Sydney 1968, S. 223 - 234.

Korte, B. - Krelle, W. - Oberhofer, W., Ein lexikographischer Suchalgorithmus zur Lösung allgemeiner ganzzahliger Programmierungsaufgaben, Unternehmensforschung, Band 13, 1969, Teil I, S. 73 - 98, Teil II, S. 171 - 192.

Kosiol, Erich, Betriebswirtschaftslehre und Unternehmensforschung. Eine Untersuchung ihrer Standorte und Beziehungen auf wissenschaftstheoretischer Grundlage, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 34. Jg., 1964, S. 743 - 762.

Kosiol, Erich, Die Unternehmung als wirtschaftliches Aktionszentrum. Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, Reinbek bei Hamburg 1966.

Koxholt, Rolf, Die Simulation, ein Hilfsmittel der Unternehmensforschung. Begriff, Methodik und Technik, Möglichkeiten der Anwendung, München - Wien 1967.

Krekó, Béla, Lehrbuch der linearen Optimierung, 3. Aufl., (Ost-)Berlin 1968.

Krelle, Wilhelm, Preistheorie, Tübingen - Zürich 1961.

Krelle, Wilhelm - Künzi, Hans Paul, Lineare Programmierung, Zürich 1958.

Künzi, H.P., Die Duoplex-Methode, Unternehmensforschung Band 7, 1963, S. 103 - 116.

Derselbe, Zum heutigen Stand der nichtlinearen Optimierungstheorie, Unternehmensforschung, Band 12, 1968, S. 1 - 22.

Künzi, H.P. - Kleibohm, K., Das Triplex-Verfahren, Unternehmensforschung Band 12, 1968, S. 145 - 154.

Künzi, H.P. - Müller, O. - Nievergelt, E., Einführungskurs in die dynamische Programmierung, Band 6 von M. Beckmann - H.P. Künzi (Hrsg.), Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Berlin - Heidelberg - New York 1968.

Künzi, H.P. - Krelle, Wilhelm (unter Mitwirkung von Oettli, Werner), Nichtlineare Programmierung, Band 1 von Krelle, W. - Künzi, H.P. et al. (Hrsg.), Monographien zur Unternehmensforschung, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1962.

Künzi, H.P. - Oettli, W. (unter Mitwirkung von Pfranger, R. und Tan, S.), Nichtlineare Programmierung; Neuere Verfahren, Bibliographie, Nr. 16 von Beckmann, M. - Künzi, H.P. (Hrsg.), Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, Berlin - Heidelberg - New York 1969.

Laßmann, Gert, Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung für die betriebswirtschaftliche Kostentheorie, mit einer einführenden Analyse des linear Programming, Köln - Opladen 1958.

Llewellyn, R.W., A Game-Information Theoretic Decision Model, Journal of Industrial Engineering, Band 12, 1961, S. 159 - 162.

Loitlsberger, Erich, Zum Informationsbegriff und zur Frage der Auswahlkriterien von Informationsprozessen, in: Loitlsberger, Erich (Hrsg.), Emprische Betriebswirtschaftslehre, Festschrift zum 60. Geburtstag von Leopold L.Illetschko, Wisbaden 1963, S. 115 - 135.

McLeod, John (Hrsg.), Simulation. The Dynamic Modeling of Ideas and Systems with Computers, New York - San Francisco - Toronto - London Sydney 1968.

Meffert, Heribert, Betriebswirtschaftliche Kosteninformationen, Ein Beitrag zur Theorie der Kostenrechnung, Wiesbaden 1968.

Meier, Robert C. - Newell, William T. - Pazer, Harold L., Simulation in Business and Economics, Englewood Cliffs (N.J.) 1969.

Mellerowicz, Konrad, Unternehmenspolitik, Band I, Freiburg i.Br. 1963.

Meyhak, Hermann, Simultane Gesamtplanung im mehrstufigen Mehrproduktunternehmen. Ein Modell der dynamischen linearen Planungsrechnung, Wiesbaden 1970.

Mitten, L.G., Branch-and-Bound Methods: General Formulation and Properties, Operations Research, Band 18, 1970, S. 24 - 34.

Morgenstern, Oskar, Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft, Wien - München 1963.

Müller-Merbach, Heiner, Operations Research, Methoden und Modelle der Optimalplanung, Berlin - Frankfurt 1969.

Derselbe, Optimale Reihenfolge, Band XV von Krelle, W. - Künzi, H.P. et al. (Hrsg.), Ökonometrie und Unternehmensforschung, Berlin - Heidelberg - New York 1970.

Nemhauser, George L., Einführung in die Praxis der dynamischen Programmierung, München - Wien 1969.

Nemtschinow, W.S., Die Anwendung mathematischer Methoden in der ökonomischen Praxis, in: Nemtschinow, W.S. (Hrsg.), Die Anwendung mathematischer Methoden in der Ökonomie, Leipzig 1963, S. 10 - 36.

Neumann, Klaus, Dynamische Optimierung, Theorie und Anwendungen, Mannheim - Wien - Zürich 1969.

Pack, Ludwig, Rationalprinzip und Gewinnmaximierungsprinzip, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 31. Jg., 1961, Teil I, S. 207 - 220, Teil II, S. 283 - 290.

Derselbe, Optimale Bestellmenge und optimale Losgröße. Zu einigen Problemen ihrer Ermittlung. Wiesbaden 1964.

Derselbe, Die Elastizität der Kosten, Grundlagen einer entscheidungsorientierten Kostentheorie, Wiesbaden 1966.

Derselbe, Die Ermittlung der kostenminimalen Anpassungsprozeßkombination, ein Anwendungsbeispiel der Dynamischen Programmierung, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 18. Jg. (NF), 1966, S. 466 - 476.

Pfanzagl, Johann, Die Minimisierung sinnloser Grössen, in: Unternehmensforschung, Band 4, 1960, S. 149 - 155.

Pfranger, R., Ein heuristisches Verfahren zur globalen Optimierung, Unternehmensforschung, Band 14, 1970, S. 27 - 30.

Piesch, Walter, Die Lösungen einer Klasse von Produktionsglättungsmodellen, Band 9 der Schriftenreihe des Instituts für angewandte Wirtschaftsforschung, Tübingen, Tübingen 1968.

Reichmann, Thomas, Die Abstimmung von Produktion und Lager bei saisonalem Absatzverlauf. Ein Beitrag zur Verbindung von Produktions-, Investitions- und Lagerplanung, Band 29 von Gutenberg, E. - Hasenack, W. - Hax, K. - Schäfer, E. (Hrsg.), Beiträge zur betriebswirtschaftlichen Forschung, Köln - Opladen 1968.

Reichmann, Thomas, Die Bestimmung des optimalen Produktionsplanes bei mehrstufigen Fertigungsprozessen in Saisonunternehmen, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 38. Jg., 1968, S. 683 - 700.

Rosen, J.B., The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, SIAM Journal on Applied Mathematics, Teil I: Band 8, 1960, S. 181 - 217, Teil II: Band 9, 1961, S. 514 - 532.

Sargeaunt, M.J., Operational Research for Management, London 1965.

Sasieni, Maurice - Yaspan, Arthur - Friedman, Lawrence, Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, Operations Research, in deutscher Sprache, hrsg. von Künzi, H.P., 2. Aufl., Würzburg - Wien 1965.

Scheuing, Eberhard Eugen, Der Unternehmer als Entscheidungszentrum, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 37. Jg., 1967, S. 651 - 658.

Schlüter, Hartmann, Zum Problem der optimalen Losgröße, Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, 6. Jg., (NF), 1954, S. 188 - 203.

Schneider, Dieter, Investition und Finanzierung, Lehrbuch der Investitions-, Finanzierungs- und Ungewißheitstheorie, Köln - Opladen 1970.

Schneider, Erich, Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil: Wirtschaftspläne und wirtschaftliches Gleichgewicht in der Verkehrswirtschaft, 7. Aufl., Tübingen 1961, 8. Aufl., Tübingen 1963.

Schneider, Robert, Wirkungen der Arbeitszeit auf Produktion, Ertrag und Kosten. Ein Beitrag zur Theorie der zeitlichen Anpassung, Stuttgart 1964.

Schultz, H., The Theory and Measurement of Demand, 5. Aufl., Chicago - London 1966.

Seitz, Manfred, Probleme der betrieblichen Planung bei im Zeitverlauf wechselnden Marktverhältnissen, Band 3 von Pack, Ludwig (Hrsg.), Schriften zur theoretischen und angewandten Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1968.

Shapiro, Jeremy F., Dynamic Programming Algorithms for the Integer Programming Problem, Teil I: The Integer Programming Problem, Teil I: The Integer Programming Problem Viewed as a Knapsack Type Problem, Operations Research, Band 16, 1968, S. 113 - 121.

Simon, Herbert A., Das Verwaltungshandeln. Eine Untersuchung der Entscheidungsvorgänge in Behörden und privaten Unternehmen, Heft 12 von "Verwaltung und Wirtschaft", Schriftenreihe der Westfälischen Verwaltungs- und Wirtschaftsakademien, Stuttgart 1955.

Derselbe, Models of Man, Social and Rational, New York - London 1957.

Smythe Jr., William R. - Johnson, Lynwood A., Introduction to Linear Programming with Applications, Englewood Cliffs (N.J.) 1966.

Sommer, Friedrich, Einführung in die Mathematik für Studenten der Wirtschaftswissenschaften, 2. Aufl., Berlin - Heidelberg - New York 1967.

Terebesi, M., Bemerkungen zum Verfahren von Gomory zur Bestimmung ganzzahliger Lösungen von linearen Programmen, Unternehmensforschung, Band 5, 1961, S. 197 - 215.

Thomas, Clayton J., Military Gaming, in: Ackoff, Russell L. (Hrsg.), Progress in Operations Research, Band I, New York - London 1961, S. 421 - 463.

Vazsonyi, Andrew, Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie (Deutsche Übersetzung von Riedler, Willi), Wien - München 1962.

Veinott,A.T. The Supporting Hyperplane Method for Unimodal Programming, Operations Research, Band 15, 1967, S. 147 - 152.

Vischer, Peter, Simultane Produktions- und Absatzplanung, Rechnungstechnische und organisatorische Probleme mathematischer Programmierungsmodelle, Wiesbaden 1967.

Vokuhl, Peter, Die Anwendung der linearen Programmierung in Industriebetrieben, Berlin 1965.

Wagner, Harvey M., Principles of Operations Research, Englewood Cliffs (N.J.) 1969.

Wagner, Helmut, Simultane Planung von Investition, Beschäftigung und Finanzierung mit Hilfe der dynamischen Programmierung, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 37. Jg., 1967, S. 651 - 658.

Weinberg, Franz (Hrsg.), Einführung in die Methode Branch and Bound, Nr. 4 von Beckmann, M. - Künzi, H.P. (Hrsg.), Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Berlin - Heidelberg - New York 1968.

Wentzel, J.S. Elemente der dynamischen Programmierung. Aus dem Russischen übersetzt von R. Herschel, München - Wien 1966.

Wetzel, Wolfgang - Skarabis, Horst - Naeve, Peter, Mathematische Propädeutik für Wirtschaftswissenschaftler, I. Lineare Algebra, Berlin 1968.

Wild, Jürgen, Neuere Informationsforschung in betriebswirtschaftlicher Sicht, Internationale Forschungsansätze und -ergebnisse zur formalen Problematik der Ablauforganisation, Berlin 1967.

Wilde, D.J., Optimum Seeking Methods, Englewood Cliffs (N.J.) 1964.

Wittmann, Waldemar, Lineare Programmierung und traditionelle Produktionstheorie, Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, 12. Jg. (NF), 1960, S. 1 - 17.

Wood, Marshall K. - Dantzig, George B., The Programming of Interdependent Activities: general Discussion, in: Koopmans, Tjalling C. (Hrsg.), Activity Analysis of Production and Allocation, Proceedings of a Conference, New York - London (1. Aufl.1951), 3. Aufl. 1957, S. 15 - 18.

Zangwill, Willard I., Buchbesprechung zu Dreyfus, Stuart E., Dynamic Programming and the Calculus of Variations, New York 1965, Management Science Serie C., Band 13, 1967, S. 33 - 35.

Derselbe, Nonlinear Programming, A Unified Approach, Englewood Cliffs (N.J.) 1969.

Zehnder, Carl August, Das Prinzip der heuristischen Methoden, in: Weinberg, Franz - Zehnder, Carl August (Hrsg.), Heuristische Planungsmethoden, Nr. 13 von Beckmann, M. - Künzi, H.P. (Hrsg.), Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Heidelberg 1969, S. 7 - 22.

Zieschang, Hans-Oskar, Das Opportunitätskostenprinzip - Inhalt, Anwendung und Bedeutung für Entscheidungen über die unternehmerische Handlungsweise, Dissertation Münster 1969.

Zoutendijk, G., Methods of Feasible Directions, A Study in Linear and Non-Linear Programming, Amsterdam - London - New York - Princeton 1960.

Derselbe, Nonlinear Programming; A Numerical Survey, SIAM Journal on Applied Mathematics (Control), Band 4, 1966, S. 194 - 210.

L e b e n s l a u f

Am 14. September 1940 wurde ich als Sohn des Industriekaufmanns Walter Band und seiner Ehefrau Hildegard Band, geb. Semrau in Deutsch Krone geboren. Ich besitze die deutsche Staatsangehörigkeit.

Nach Schulbesuch in Elmshorn (1947 - 1951), Kassel (1951 - 1956) und Dortmund (1956 - 1960) legte ich am 18. März 1960 am Max-Planck-Gymnasium zu Dortmund die Reifeprüfung ab. Anschließend leistete ich für die Dauer von 21 Monaten Wehrdienst. Mit dem Sommersemester 1962 nahm ich an der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster das Studium der Betriebswirtschaftslehre auf. Am 2. Mai 1967 bestand ich hier die Diplomprüfung für Kaufleute.

Am 1. Juni 1967 wurde ich als Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Betriebsanalysen der Westfälischen Wilhelms-Universität eingestellt. Am 1. Januar 1968 wurde ich Verwalter der Stelle eines Wissenschaftlichen Assistenten am Institut für industrielle Unternehmensforschung, und seit dem 1. April 1969 bin ich Verwalter der Stelle eines Wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Betriebsanalysen.